Università degli studi di Catania

Facoltà di Ingegneria Informatica
Tesi di Reti di Calcolatori
Relatore : prof. **Orazio Mirabella**

“APPLICAZIONI DEL FILTRO DI KALMAN SU ACCELEROMETRI”

di

Angelo Nunzio La Bruna

INDICE GENERALE

INDICE……2

INTRODUZIONE AL PROGETTO.... 5

Capitolo 1
IL SISTEMA DI NAVIGAZIONE INERZIALE

1,1 Panoramica della problematica..... 6

1,2 Sistemi di riferimenti inerziali e problematiche di rotazione.... ...9

1,3 Considerare la Terra come un sistema inerziale……11

1,4 Osservatori inerziali……..13

1,5 Trasformazione dei sistemi di riferimento……15

Capitolo 2
IL SISTEMA DI MISURA

2,1 Descrizione del sistema……..……17

2,2 Accelerometri……18

2,3 Accelerometro LIS3V02DQ……22

2,4 Registri di controllo dell'accelerometro LIS3V02DQ……..24

2,5 MuIn……27

2,6 Connessione dell'Accelerometro……32

2,7 Protocollo ZigBee……..33

Capitolo 3
IL MODELLO MATEMATICO DEL SISTEMA

3,1 Modello dinamico discreto a un asse……35

3,2 Descrizione stocastica dell'errore di modello……..…39

3,3 Modello dell'osservatore……..41

3,4 Estensione del modello ai due assi……...44

3,5 Il Modello matematico ad accelerazione costante applicativo..46

3,6 Modello applicativo……...48

Capitolo 4
IL FILTRO DI KALMAN

4,1 Storia del filtro di Kalman……51

4,2 Introduzione al filtro di Kalman: gli ingredienti fondamentali….52

4,3 Il filtro di Kalman a tempo discreto DKF……...54

4,4 Inizializzazione del filtro di Kalman……57

4,5 Predizione dello stato……..59

4,6 Aggiornamento della varianza dell'errore sullo stato……..60

4,7 Aggiornamento della matrice di correzione sullo stato……..61

4,8 stima dello stato post-filtraggio……..62

4,9 Aggiornamento della matrice di varianza dell'errore sullo stato a posteriori……..63

4,10 Aggiornamento ciclo…….64

Capitolo 5
IMPLEMENTAZIONE DEL FILTRO

5,1 Strumenti di sviluppo……65

5,2 Implementazione delle matrici del filtro…….66

5,3 Il metodo Kalmango…….69

5,4 Aggiornamento dello stato……..71

5,5 Aggiornamento della varianza dell'errore prima della stima…..72

5,6 Calcolo del guadagno……..74

5,7 Aggiornamento della stima sullo stato……..78

5,8 Aggiornamento della varianza sui disturbi dopo la stima……..80

5,9 Risultati ottenuti……82

Capitolo 6
CONSIDERAZIONI FINALI

6,1 Applicazione ai circuiti RC……85

6,2 Prestazioni del filtro di Kalman ……..92

6,3 Esempi di sistemi di navigazione inerziale che necessitano del filtro di Kalman…….93

6,4 Questioni di fisica……...101

Introduzione al progetto

Il progetto e orientato alla soluzione del disturbo presente su accelerometri tramite il filtro di Kalman.
Parte di questo lavoro prende in considerazione un sistema in grado di rilevare delle accelerazioni.
La misura di tale accelerazione risulta altamente rumorosa, il filtro di Kalman si presuppone come obbiettivo di filtrare tali disturbi.
Una macchina rotante viene messa in moto da un motorino.
Tale sistema prevede l'utilizzo di un braccio rotante, su questo braccio viene fissato un accelerometro.
Lo strumento di misura rivela l'accelerazione lungo i tre assi cartesiani ax ay az.
L'acquisizione del dato sporco, avviene per collegamento dell'accelerometro ad una scheda MuIn atta al trasferimento tramite protocollo ZigBee.
Il software sviluppato permette di rilevare graficamente il moto del braccio e di correggere la traiettoria tramite filtraggio dei disturbi, dovuti questi ultimi alle oscillazioni dell'accelerometro ed ad eventuali rumori elettromagnetici correlati.
Il filtraggio dei disturbi avviene grazie al filtro di Kalman.
Il primo capitolo di questa tesi vuole dare una panoramica generale sulla problematica trattata nei sistemi di navigazione inerziale.
La seconda parte descrive invece il funzionamento di un sistema di misura dell'accelerazione descrivendo componenti e protocolli.
Il testo si occupa poi delle cause dei disturbi descrivendo il rumore nei circuiti elettromagnetici.
Si prosegue con il filtro di Kalman a livello teorico come possibile alternativa alla soluzione dei disturbi.
Il quinto capitolo descrive nel dettaglio lo sviluppo del software relativo al filtro e l'ultimo descrive le possibili applicazioni del filtro di kalman.

Capitolo 1
IL SISTEMA DI NAVIGAZIONE INERZIALE

1,1
Panoramica della problematica

La problematica trattata, riguarda i sistemi di navigazione inerziale, tali sistemi si occupano di monitorare le posizione di veicoli tramite stima dell'accelerazione.
Un sistema di navigazione inerziale è utile alla navigazione di un veicolo, utilizza sensori sensibili alle variazioni di moto e computer collegati a tali sensori per tracciare l'orientamento, la velocità (direzione modulo e verso) e la posizione di un veicolo senza l'ausilio di riferimenti esterni.
Un Sistema inerziale è capace di rilevare una variazione di posizione geografica, se l'oggetto si muove verso Sud, verso Nord, verso Est o verso Ovest, una variazione del suo orientamento rotatorio lungo un asse e una variazione della velocità.
Il sistema utilizza dunque misure di accelerazione lineare e angolare per stimare le posizioni.
Un sistema cosi fatto richiede l'utilizzo di accelerometri, giroscopi o altri dispositivi sensibili al moto.
Il Giroscopio misura velocità angolari su una terna di valori in un sistema di riferimento inerziale.
Conoscendo l'orientamento iniziale del veicolo e integrando la velocità rilevata si può risalire all'orientamento del mezzo istante per istante .
L'accelerometro misura accelerazioni lineari dirette lungo i tre assi del sistema di riferimento inerziale.
Poiché l'accelerometro viene fissato al veicolo e quindi al sistema, non è consapevole del particolare orientamento dell'oggetto, in seguito ad una sua rotazione, il sensore infatti ruota insieme al veicolo.

Immaginiamo un oggetto capace di muoversi nello spazio, verso l'alto o verso il basso,verso sinistra o verso destra,in avanti o indietro; fissiamo un accelerometro su tale oggetto.
L'accelerometro e in grado di percepire se l'oggetto va avanti o indietro se sta salendo o scendendo, se si sposta a sinistra o a destra, ma non è in grado di valutare il suo orientamento rispetto a terra, come un essere umano non sarebbe capace di orientarsi alla guida di un veicolo se bendato, pur sentendo che la macchina va avanti o indietro perché schiacciato indietro o catapultato in avanti.
Il moto è rilevato rispetto al mezzo, ma nulla si conosce della direzione rispetto a terra.
Il giroscopio dal canto suo conosce l'orientamento del veicolo visto che ha informazioni relative alle accelerazioni angolari, ma sulla base di queste sole informazioni, egli conosce la direzione che l'auto sta prendendo, ma non quanto velocemente o lentamente si stia muovendo.
Il quadro completo si ottiene utilizzando i due sensori contemporaneamente, tenendo traccia della velocità angolare del sistema e delle accelerazioni lineari misurate rispetto al sistema in movimento, è possibile risalire all'accelerazione lineare rispetto al sistema di riferimento inerziale istante per istante.
A partire poi dall'accelerazione lineare cosi ottenuta, e applicando le opportune leggi della cinematica e possibile risalire a velocità e posizione dell'oggetto.
Il termine navigazione introdotto in questa tesi rappresenta l'obbiettivo stesso che ci stiamo proponendo, e le problematiche legate ai sensori, ai rumori ed al controllo in generale.
La navigazione e l'insieme delle tecniche e dei metodi che ci permette di individuare il moto di un oggetto, descritto in un sistema di riferimento predeterminato, di calcolare quindi il tragitto di un corpo immerso nello spazio da un punto ad un altro.
In questo caso l'obbiettivo ad esempio è la descrizione del tragitto che compie l' accelerometro in orbita sull'asta.
Casi più complessi in generale possono essere rappresentati dal moto di un veicolo sia esso un auto, o un aereo, o un satellite in orbita su un pianeta, o il controllo della traiettoria di un missile.
La definizione del termine navigazione nasconde quindi due concetti di fondamentale importanza;

Il primo concetto è rappresentato dallo stato della navigazione, ovvero posizione velocità e accelerazione.
Il secondo invece riguarda la determinazione a priori o il mantenimento della rotta prefissata.
La soluzione di questo problema permette al pilota o al sistema automatico di controllare e correggere, se necessario, la propria traiettoria.
I dati rilevati dall'accellerometro in questo contesto vengo filtrati dai disturbi elettromagnetici inerenti al circuito.
Risulta tuttavia possibile filtrare tali rumori tramite l'utilizzo del filtro di Kalman trattato approfonditamente più avanti.
In questo capitolo vengono accennate le problematiche inerenti ai sistemi di riferimento inerziali e la relativa problematica di rototraslazione di un sistema rispetto ad un altro, si accenna anche ad un sistema inerziale considerando il baricentro della terra stessa, come punto di origine del sistema, e come un osservatore può essere definito inerziale.

1,2
Sistemi di riferimenti inerziali e problematiche di rotazione

Un Sistema di navigazione inerziale utilizza sistemi di riferimento inerziali.
Un sistema di riferimento inerziale è un sistema di riferimento in cui ha valenza il principio fondamentale della dinamica; può essere considerato inerziale con buona approssimazione il sistema solidale con le stelle detto sistema delle stelle fisse e ogni altro sistema che viaggi di moto rettilineo uniforme rispetto ad esso.
In un sistema di riferimento inerziale un punto materiale sottoposto ad un insieme di forze con risultante nulla, se è posto in stato di quiete esso rimarrà in stato di quiete se posto in stato di moto conserverà tale moto.
Un sistema spazio-temporale associa ad ogni istante t un determinato punto dello spazio identificato dalle tre coordinate spaziali note come x, y, z, questo sistema e senza alcun dubbio parte integrante del sistema inerziale.
Il sistema delle stelle fisse e considerato in buona approssimazione inerziale poiché le forze gravitazionali non influiscono considerevolmente sui corpi posti nel sistema data la distanza delle stelle dal nostro pianeta.
In realtà secondo una considerazione basata sulla relatività generale risulta possibile definire un sistema di riferimento inerziale, purché si consideri una porzione di universo abbastanza piatta, tale cioè da non essere perturbata da forze gravitazionali.
Comunque risulta utile fare distinzione tra sistema di riferimento inerziali teorici e *Frame* che sono considerati come la materializzazione dei sistemi di riferimento teorici, per mezzo di modelli matematici, misure e calcoli.
I problemi fondamentali dipendono dalla rotazione che un sistema inerziale subisce man mano che scorre il tempo, i punti del sistema, infatti, non è detto che si muovano tutti con la stessa velocità, il sistema di riferimento subirà sempre una rotazione lungo gli assi rispetto al sistema precedente, e magari di tipo non uniforme.

Una successione di sistemi di riferimento di questo tipo da origine a un nuovo sistema di riferimento che ora indichiamo con S(t) (sistema ottenuto al tempo t), ma non è detto che quest'ultimo sia parallelo all'originale S(0) (Sistema al tempo 0).
Consideriamo un sistema fissato a terra al tempo t=0, man mano che otteniamo valori di misure nel tempo, la rotazione terrestre influisce sui livelli di misura e il nuovo sistema S(t) avrà subito una rotazione.
Un gran numero di rilevazioni fisiche, ci permette tuttavia di ottenere un metodo tale da raggiungere un nuovo sistema di riferimento S(t)new, che abbia origine nel sistema S(t) raggiunto, e che sia parallelo a S(0) cioè al sistema di riferimento inerziale originario.
S(t)new sarà quindi un sistema di riferimento inerziale.
Naturalmente un metodo di questo tipo risulta essere affetto da errori sistematici, dovuti alle osservazioni e alle misure fisiche rilevate, affette da disturbi.
La stima di tali trasformazioni ci permette di ridurre notevolmente le differenze tra sistemi di riferimento inerziali teorici e Frame.

1,3
Considerare la Terra come un sistema inerziale

La Terra può essere considerata un sistema di riferimento inerziale. Per far ciò bisogna tenere presente però alcuni fattori di influenza.
Per prima cosa si può notare che la terra ruota attorno al proprio asse e ruota attorno al Sole, i suoi movimenti di rotazione come osservato prima influiscono sul sistema di riferimento inerziale, cosi come il suo movimento di rivoluzione.
Inoltre lontano dai poli, ove la velocità di rotazione è maggiore, maggiore è la forza centrifuga.
Lontano dall'equatore i corpi sono soggetti alla forza di Coriolis, che devia verso destra il moto di tutti i corpi dell'emisfero nord e verso sinistra quelli dell'emisfero sud.
Nonostante ciò tali interazioni risultano quasi irrilevanti, in buona approssimazione quindi la terra risulta un sistema di riferimento inerziale.
Si può comunque definire il sistema geocentrico pseudo-inerziale detto iframe come un sistema cartesiano con origine fissata nel baricentro terrestre, (centro di massa della terra) ed assi cartesiani che si mantengono paralleli nello spazio.
Su questo sistema vale la legge della dinamica nella forma:

$$dx^2/dt^2 = a + g$$

dove:

dx^2/dt^2 *=accelerazione esercitata sul corpo.*

a *=accelerazione misurata dal sensore non gravitazionale*

g *=accelerazione gravitazionale*

Come mostra la figura il centro di massa della terra deve coincidere con il centro del sistema di riferimento quasi inerziale, inoltre l'asse Y coincide con l'asse di rotazione terrestre.
L'asse Z invece è diretto verso il punto nodale N identificato dal punto in cui l'ellittica della terra incontra l'equatore sulla sfera celeste.
Poiché l'equatore si muove in maniera ortogonale all'asse di rotazione terrestre e l'ellittica della terra si mantiene pressoché costante nel tempo, il punto nodale N si muove così lentamente da permettere le condizioni adeguate, per definire questo sistema di coordinate un sistema di riferimento quasi inerziale.
Il sistema descritto ci permette di individuare il moto di un corpo sulla terra, tramite misura dell'accelerazione,per mezzo di sensori sensibili al moto: accelerometri giroscopi.

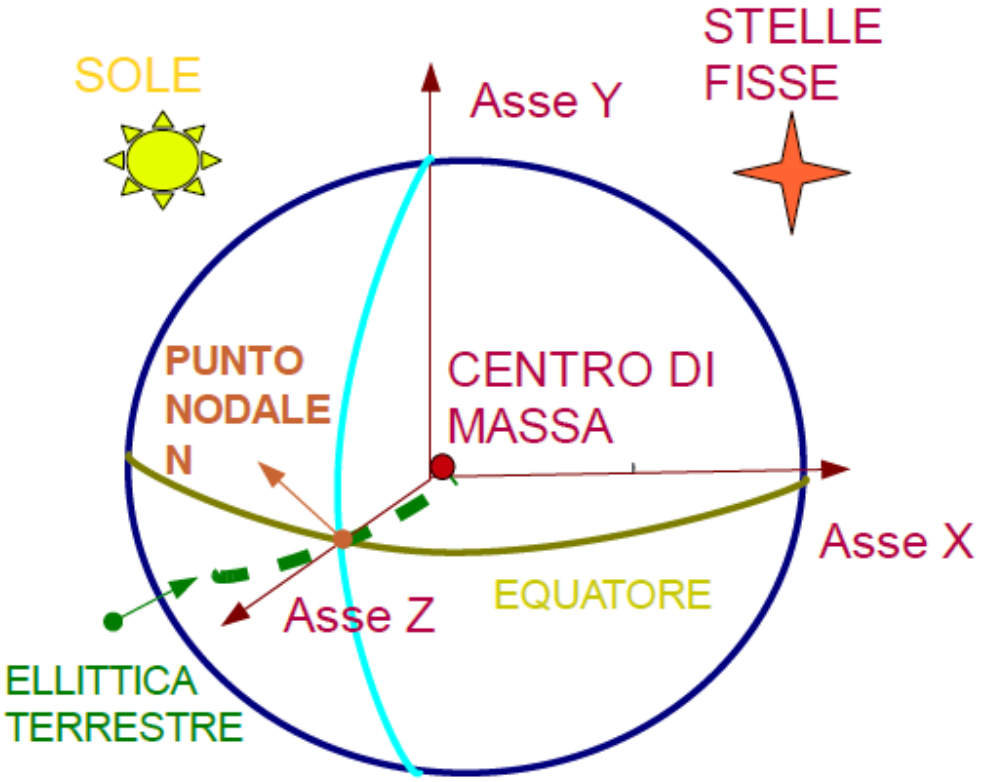


Figura 1: illustrazione i-Frame

1,4
Osservatori inerziali

La teoria della Dinamica classica in fisica dei corpi, deve essere sottoposta al principio secondo cui due osservatori vedano evolversi contemporaneamente lo stesso fatto fisico, e quindi lo possano descrivere con le stesse leggi fisiche.
Consideriamo un osservatorio A in moto rettilineo traslatorio uniforme rispetto ad un osservatorio B.
A misura i dati e con le opportune leggi le trasferisce su B che a sua volta è in grado di misurare il dato contemporaneamente ad A.
Due osservatori di questo tipo si dicono osservatori inerziali.
Oggetti di questo tipo possono essere inseriti in un contesto a sistema di riferimento inerziale.
A e B osservano che una medesima massa, sottoposta alla medesima forza, varia nello stesso modo il suo stato di moto.
Si può dire che la massa presenta la stessa inerzia nei confronti di un tentativo di variarne lo stato.
Ancora possiamo fare un esempio per chiarire il concetto di osservatorio inerziale:
“Se consideriamo un oggetto in caduta libera all'interno del quale fissiamo un accelerometro, lo strumento non riuscirà a percepire l'accelerazione gravitazionale g, due osservatori esterni inerziali invece rilevano g.”
Quel che si vuole chiarire dunque e che un sistema di riferimento che risulta accelerato non può essere considerato osservatorio inerziale, all'interno di un osservatorio inerziale difatti un corpo mantiene la legge di inerzia.
Possiamo dire che se la forza misurata in A e uguale alla forza misurata in B cioè:
se f(A)=f(B) ovvero se m*a(A)=m*a(B)
con:
f(A)=forza misurata sull'osservatorio A, f(B)=forza misurata sull'osservatorio B, m=massa dell'oggetto, a(A)=accelerazione rilevata in A, a(B)=accelerazione rilevata in B, allora A e B sono due osservatori inerziali.
Naturalmente se fissiamo un accelerometro ad un asta roteante, il sistema di riferimento sull'asta rispetto al sistema fissato a terra non

può essere considerato sistema di riferimento inerziale come già discusso nei paragrafi precedenti.

1,5
Trasformazioni dei sistemi di riferimento

Nel sistema analizzato come già accennato nell'introduzione, l'accelerometro in questione è fissato ad un'asta che ruota, il sistema di riferimento del sensore che ha origine nel centro di massa del dispositivo misurante, ruota quindi insieme al dispositivo, risulta opportuno allora fissare un sistema di coordinate esterno e fermo rispetto a quello del sensore, che ci permetta un quadro più chiaro nel valutare il movimento dell'asta rotante.
I dati misurati dal sensore infatti devono essere riportati in un sistema fisso solidale con la terra mentre l'asta ruota.
Vengono qui descritti allora le possibili trasformazioni tra sistemi di riferimento secondo un punto di vista fisico.
In questo caso i punti ottenuti nel sistema in rotazione con il sensore che indicheremo con O(x,y)[sensore], devono essere riportati nel sistema di riferimento solidale con la terra, che chiameremo semplicemente O(x,y).
Si tratta quindi di effettuare una rototraslazione dal sistema O(x,y)[sensore] rispetto al sistema O(x,y).
Un' operazione di questo tipo prende in considerazioni trasformazioni di traslazione e rotazione.
Se consideriamo il punto P di coordinate O(x,y) nel sistema inerziale e O'(x',y') quelle nel sistema in moto, possiamo dire che vale un legame di traslazione descritto dalle seguenti:

$$x=a+x'$$
$$y=b+y'$$

con:

a= distanza tra O e O' lungo l'asse x
b=distanza tra O e O' lungo l'asse y

Se consideriamo il punto P di coordinate O(x,y) nel sistema inerziale e O'(x',y') quelle nel sistema in rotazione, possiamo dire che vale un legame di rotazione descritto dalle seguenti:

$x = x' \cos(w) - y' \sin(w)$ e $y = x' \sin(w) - y' \cos(w)$

con: *w=angolo di rotazione*

Combinando le due formule si può ottenere una rototraslazione. Applicando al sistema le seguenti:

$$x = a + x' \cos(w) - y' \sin(w)$$
$$y = b + x' \sin(w) - y' \cos(w)$$

dato che l'asta rotante mantiene una accelerazione costante e il punto in cui è posizionato l'accelerometro è pari all'ampiezza del braccio, cioè al raggio del cerchio che descrive la rotazione dell'asta, è possibile effettuare prima una rotazione poi una traslazione; riportando cosi i risultati dal sistema O(x,y)[sensore] al sistema O(x,y).

Capitolo 2
IL SISTEMA DI MISURA

2,1
Descrizione del sistema

Un sistema per la misura di una determinata grandezza fisica è un insieme di dispositivi collegati in maniera tale da ottenere valori che vanno più vicino possibile ai valori reali.
Un asta di alluminio viene fissata ad una base in legno è costretta a ruotare grazie ad un motorino utilizzato per la modellistica.
All'estremità dell'asta viene fissato un accelerometro in modo tale da rilevare il moto circolare dell'asta attorno alla base.
Tale accelerometro è connesso ad una scheda Multi interfaccia capace di realizzare la comunicazione con il programma.
Dal dato cosi ottenuto si può risalire tramite doppia integrazione alla relativa posizione dell'asta durante il suo moto.
Si scopre però che il dato è disturbato, le posizioni risultano errate, il grafico relativo alle posizione dovrebbe essere un cerchio, ma in realtà ad ogni giro il sistema disegna diversi cerchi e con il passere del tempo tende a discostarsi sensibilmente dalla posizione reale.
Tali disturbi sono relativi a rumori elettromagnetici e oscillazzioni del sistema stesso.
Introduciamo all'ora il filtro di Kalman, che si occupa di filtrare tali disturbi in modo da ottenere grafici meno sensibili ai rumori, e che oscillano presso i valori reali.
Il capitolo descrive nel dettaglio i componenti di un sistema di questo tipo.
Il primo paragrafo tratta nel dettaglio il funzionamento degli accelerometri e i tipi esistenti da un punto di vista teorico.
I paragrafi successivi riguardano nel dettaglio l' accelerometro LIS3LV02DQ.
Si considera poi la scheda multi interfaccia MuIn.
Il successivo ed ultimo paragrafo tratta nel dettaglio il protocollo di comunicazione ZigBee.

2,2 Accelerometri

Un **accelerometro** è uno strumento di misura in grado di rilevare e/o misurare l'accelerazione.
Con il moltiplicarsi delle applicazioni, sono accresciute anche le tipologie di questi strumenti, ognuno con caratteristiche funzionali e costruttive differenti.
Nella maggior parte degli accelerometri, il principio è il medesimo: si basa sulla rilevazione dell' inerzia di una massa quando viene sottoposta ad un'accelerazione.
La massa viene di solito sospesa grazie ad un apparato elastico, mentre un sensore ne rileva lo spostamento rispetto alla struttura fissa del dispositivo, tale struttura rappresenta il sistema inerziale per l'accelerometro ma non per il sistema di navigazione e/o controllo del movimento.
In presenza di un'accelerazione, la massa (che è dotata di una propria inerzia) si sposta dalla propria posizione di riposo in modo proporzionale all'accelerazione rilevata. Il sensore trasforma questo spostamento in un segnale elettrico acquisibile dai moderni sistemi di misura.
Classifichiamo gli accelerometri a seconda del principio di funzionamento del sensore:

2.2.a Accelerometro estensimetrico

2.2.b Accelerometro piezoresistivo

2.2.c Accelerometro LVDT

2.2.d Accelerometro capacitivo

2.2.e Accelerometro piezoelettrico

2.2.f Accelerometro laser

2.2.g Gravitometro

2.2.a Accelerometro estensimetrico

L'accelerometro a ponte estensimetrico sfrutta come principio di rilevazione la variazione di resistenza di un estensimetro, (variazione dovuta all'allungamento della sua lunghezza).
Una massa viene sospesa su dei sottili lamierini, su quest'ultimi sono fissati degli estensimetri collegati a ponte di Wheatstone.
Quando la massa si sposta, flette i lamierini causando un allungamento degli estensimetri.
Il voltimetro collegato, è in grado di leggere la differenza di tensione sbilanciata nel ponte di Wheatstone.
Questo valore risulta possedere una proporzionalità con all'accelerazione che vogliamo misurare.

2.2.b Accelerometro piezoresistivo

L'accelerometro a ponte piezoresistivo è molto simile all'accelerometro a ponte estensimetrico, ma al posto degli estensimetri sono utilizzati sensori piezoresistivi.
Tali sensori si comportano in modo analogo agli estensimetri, ma permettono allungamenti sono più sensibili perché permettono allungamenti superiori,ma presentano problemi di stabilità con la variazione di temperatura.

2.2.c Accelerometro LVDT

L'accelerometro LVDT sfrutta, come principio per la rilevazione un sensore LVDT *(Linear Variable Differential Transformer)* integrato nella struttura dell'accelerometro stesso.
In questi dispositivi, la massa è costituita da un **nucleo ferromagnetico** , essa scorre sospesa tra molle all'interno di un canale, attorno al quale sono avvolte delle bobine che si occupano di rilevare la posizione della massa.
Un apposito circuito rileva la posizione del nucleo rispetto alle bobine e genera un segnale elettrico proporzionale allo spostamento rispetto alla posizione di riposo.

2.2.d Accelerometro capacitivo

L'accelerometro capacitivo usa la variazione della capacità elettrica di un condensatore al variare della distanza tra le sue armature.
In questi accelerometri la massa costituisce un'armatura, mentre l'altra è la struttura fissa del dispositivo, nell'immediata prossimità della massa. La massa viene sospesa grazie al componente elastico.
Un apposito circuito si occupa di misurare la capacità del condensatore generando un segnale elettrico proporzionale alla posizione della massa, da cui se ne deduce il valore dell'accelerazione.

2.2.e Accelerometro piezoelettrico

Nell'accelerometro piezoelettrico il principio per la rilevazione dello spostamento della massa, è un segnale elettrico generato da un cristallo piezoelettrico quando è sottoposto ad una compressione.
In questi accelerometri la massa viene sospesa sul cristallo piezoelettrico, che costituisce sia il sensore, che l'elemento elastico.
In presenza di un'accelerazione la massa comprime il cristallo, il quale genera un segnale elettrico proporzionale alla compressione.
Questi dispositivi possono rilevare accelerazioni elevatissime senza danneggiarsi (anche 1000 g) ma presentano una bassa sensibilità.

2.2.f Accelerometro laser

L'accelerometro laser viene usato per effettuare misure estremamente precise, non ottenibili con altri tipi di strumenti.
Nel dispositivo in questione un interferometro laser punta l'oggetto in movimento, istante per istante, tracciando la sua posizione, operando la derivata seconda rispetto al tempo di quelle posizioni, si può ottenere la misura dell'accelerazione.
Il principio di funzionamento è concettualmente, completamente differente rispetto a quelli sopra esposti, e si basa sul principio fisico che l'accelerazione è una derivata della velocità nel tempo.
Gli svantaggi di questi dispositivi sono:
costi elevati, piuttosto ingombranti, interferometro montato a terra o su un luogo fisso, laser costantemente puntato verso l'oggetto in moto.

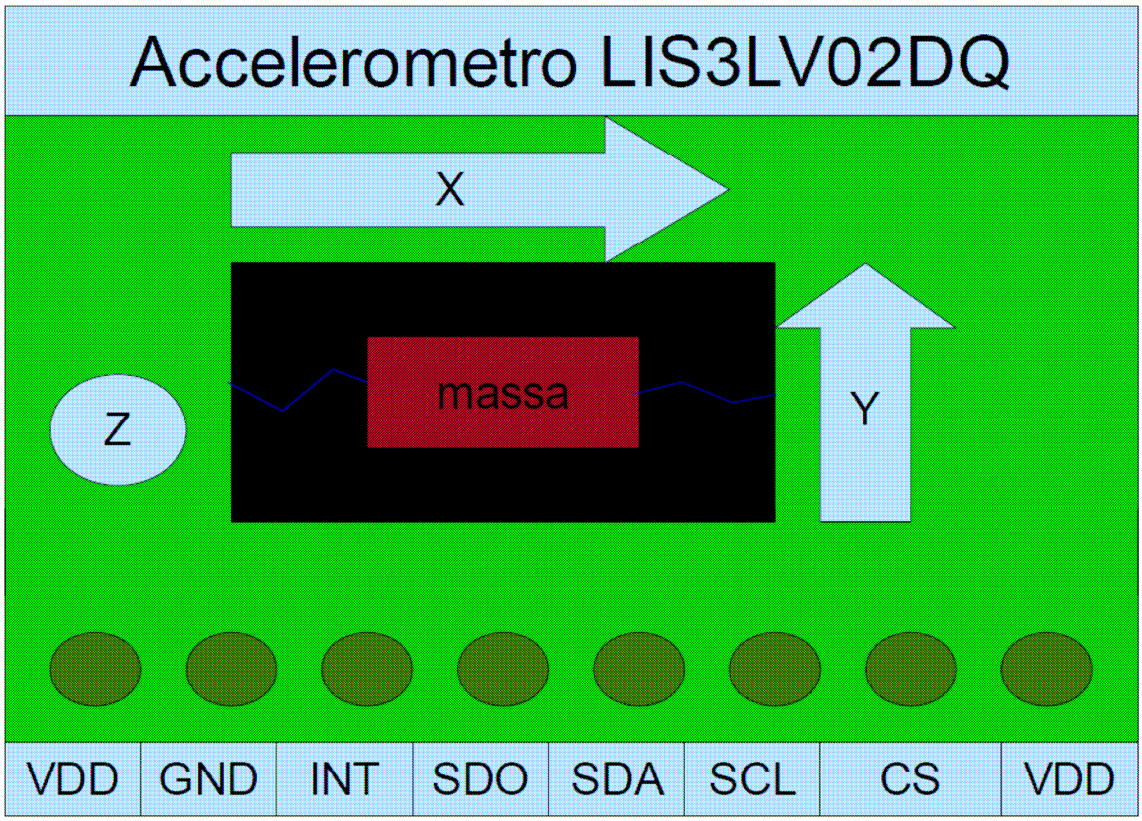
2.2.g Gravitometro

Il gravitometro è realizzato appositamente per misurare l'accelerazione gravitazionale.
Secondo la relatività generale infatti l'universo sta su di un piano gli oggetti che stanno su di esso lo deformano creando deflessioni nello spazio-tempo, responsabili degli effetti gravitazionali.
Gli effetti della gravità e dell'accelerazione sono gli stessi, perciò un accelerometro non può fare distinzione tra le due cause.
Questo strumento lavora con lo stesso principio dell'accelerometro laser
si rileva l'accelerazione della caduta di un grave in una camera sottovuoto, per misurare lo spostamento, e un orologio atomico per misurare il tempo di caduta.
La rilevazione dell'accelerazione gravitazionale, riveste interessi in campo scientifico (specie in fisica e in geologia) e nell'industria estrattiva (specie in campo delle estrazioni petrolifere.

2,3
Accelerometro LIS3LV02DQ

E' un accelerometro lineare a tre assi con uscita digitale.
Permette di misurare le accelerazioni ax ay az tramite un sensore di rilevamento, riconosce lo spostamento di una massa integrata nella struttura dell'accelerometro stesso.
La massa del dispositivo rappresenta il nucleo-ferromagnetico che può scorrere sospeso da molle, all'interno di un canale attorno al quale sono avvolte delle bobine responsabili della misura dell'oscillazione del dispositivo per spostamento del nucleo.
Un apposito circuito rileva la posizione del nucleo rispetto alle bobine e genera un segnale elettrico proporzionale allo spostamento rispetto alla posizione di riposo.
Questo processo dedicato è sviluppato da ST per la produzione di sensori inerziali.
L'accelerometro include inoltre un' interfaccia seriale I2C in grado di prelevare le informazioni dal sensore e metterle a disposizione del mondo esterno tramite un processo CMOS.
Il dispositivo può essere tarato su un oppurtuno livello di soglia di accelerazione valido su tutti e tre gli assi in modo tale da generare l'interrupt wake-up/free-fall, e disponibile in package SMD e supporta il range di temperature -40°---+85°.
La scheda prevede i seguenti PIN:
Vdd su cui viene connessa un alimentazione prevista a 3.3V, un GND per il collegamento della massa, INT utilizzabile per interupt, SDO necessario per comunicazione tramite protocollo SPI, SDA utilizzato per la connessione mediante protocollo I2C, SCL segnale di clock per il protocollo I2C, CS impostato al livello logico 1 per impostazioni sul voltaggio 3.3 V per l'utilizzo dell'interfaccia I2C, ed infine un pin CK per un clock esterno che può essere collegato a massa.
Il dispositivo a un valore di fondo scala selezionabile -6g +6g,-2g +2g.
Tale accelerometro può essere fissato al braccio rotante messo in moto dal motorino e rilevare le accelerazioni relative al movimento del braccio.

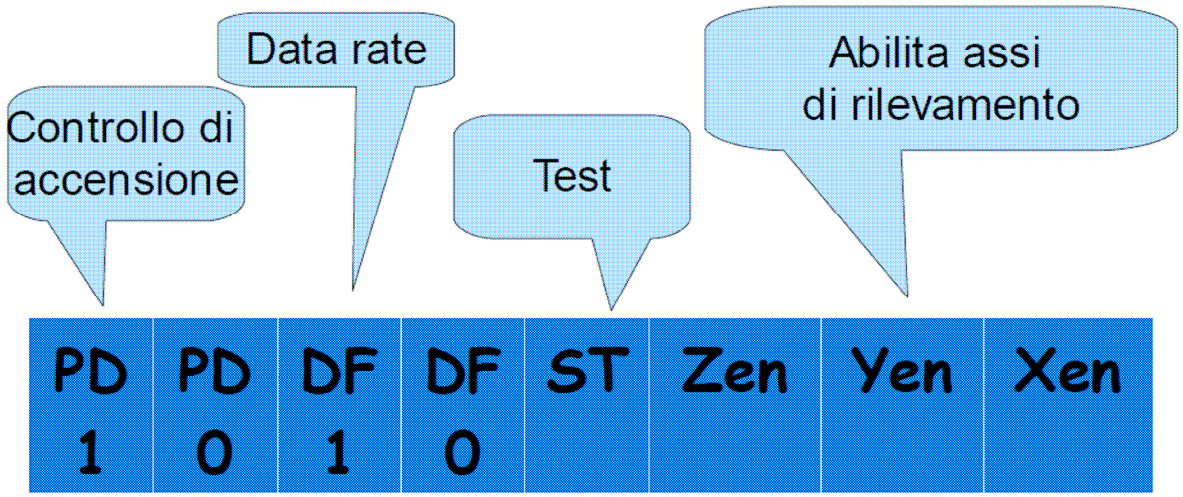
Naturalmente visto che il sistema rotante e posto su un tavolo, esso è sottoposto alla forza gravitazionale lungo l'asse y diretto verso il centro della terra.
Questa accelerazione g pari a 9,81 m\s^2 deve essere presa in considerazione se si vogliono analizzare i risultati dell'accelerometro.
Di seguito la figura che illustra il dispositivo per la rivelazione dell'accelerazione:



2,4
Registri di controllo dell'accelerometro LIS3LV02DQ

I registri di configurazione coinvolti sono tre:
CTRL_REG1, CTRL_REG2, DD_CFG.
Il primo registro si trova all'indirizzo di memoria 0x21contiene bit che controllano lo stato di accensione del dispositivo.
Esattamente i primi due bit PD1 e PD0 se impostati entrambi a 0 il dispositivo e in attesa di interrupt, se almeno uno dei due e settato ad 1 allora il sistema e acceso e il dispositivo e in “NORMAL MODE”.
I bit successivi terzo e quarto DF1 e DF0 impostano la frequenza di campionamento,il data rate con cui l'accelerometro campiona i dati rispettivamente: 00 40Hz, 01 160Hz, 10 640Hz e 11 2560hz.
Il bit ST e una funzione test se settato ad 1 e ON, genera valori random sugli assi attivi.
Gli ultimi tre bit del registro abilitano gli assi su cui si rivelano le accelerazioni rispettivamente Zen per l'asse Z, Yen per l'asse Y e Xen per l'asse X.

Di seguito la figura che illustra il registro di controllo:



CTRL_REG2 si trova all'indirizzo di memoria 0x21 si occupa di selezionare i valori di fondo scala tramite il bit FS.
FS settato ad 1 [-6 +6]g, settato a 0 [-2 +2]g.
Si può settare il bit di controllo BDU relativo scrittura dei dati rilevati sui registri di output.
BDU settato ad 1 non scrive sui registri di uscita fino a quando il dato non viene letto, settato ad 0 scrive ogni accelerazione rilevata. Se settato ad 1 si può correre il rischio di perdere relative informazioni.
Il bit di controllo BLE permette di settare il modo di utilizzo di BDU.
IEN setta l'abilitazione al pin di interapt.
DRDY bit di controllo del formato del dato in uscita.
SIM abilita il protocollo SPI.
DAS attiva tutti e 16 i bit dei registri di uscita.

Di seguito la figura che illustra il registro di controllo.

FS	BDU	BLE	BOOT	IEN	DRDY	SIM	DAS

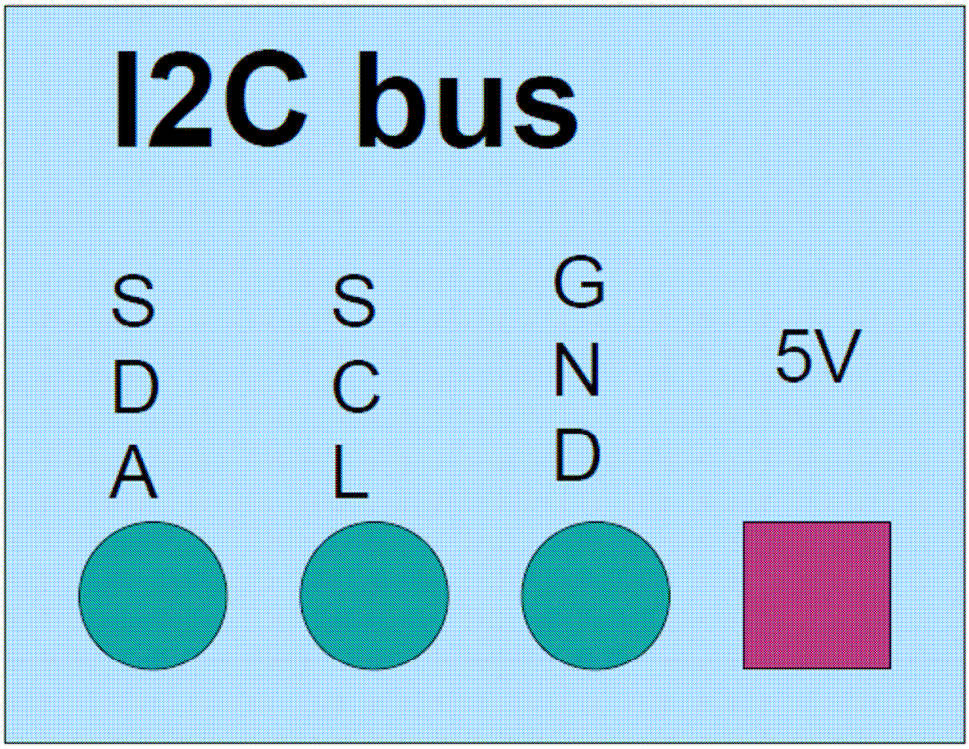
DD_CFG e il registro che configura il cambio di direzione in particolare il bit IEND il primo della serie settato ad uno abilita l'interupt per il cambio di direzione.
I registri di Output coinvolgono ogni asse (x,y,z), per l'asse x vengono chiamati in cause due registri con cifre piu o meno significative rispettivamente il registro OUTX_L e OUTX_H, e cosi per y OUTY_L e OUTY_H e per z OUTZ_L e OUTZ_H.
Il dato relativo agli assi viene memorizzato in complemento a due nei rispettivi registri.

2,5
MuIn

E' una scheda Multi Interfaccia.
Questo dispositivo permette di inviare e ricevere dati grazie allo zoccolo multifunzione, puo' essere utilizzata con un modulo XBee, per creare una connessione ZigBee, con un modulo XPort, per una connessione Ethernet.
Con il Bus I2C è possibile infatti inviare comandi tramite connessione seriale.
I2C utilizzato nei circuiti integrati è un sistema di comunicazione bifilare composto da un master ed uno o più slave, ma si possono utilizzare sistemi più complessi con architetture multi-master.
Il Bus e stato ideato da Philips intorno agli anni 80', nel 92' e stata rilasciata la prima versione del protocollo e nel 95' per esigenze commerciali la versione SIMBUS brevettata da Intel.
I vantaggi offerti sono quelli relativi all'utilizzo di sole due linee, essendo infatti un protocollo di comunicazione seriale impegna solo due pin per i dispositivi che lo usano.
Dall'altra parte presenta lo svantaggio di essere relativamente lento nella comunicazione.
Le due linee seriali di comunicazione sono: SDA e SCL rispettivaamente per i dati e per il clock.
Va inoltre considerata una connessione di riferimento GND e una linea di alimentazione VDD cui vengono connessi resistore di pull-up.
Le tensioni tipiche utilizzabili sono 5V e 3.3V.
I2C ha 7 bit di indirizzo da B1 il più significativo a B7 il meno significativo, 128 possibili indirizzi detti nodi, 16 di questi sono inutilizzabili, riservati al bus stesso.
I possibili collegamenti risultano quindi 112.
Le velocità di trasmissione sono 100 kps al secondo nella modalità standard e 10 kps/s nella modalità low-speed, anche se le ultime revisioni hanno introdotto dispositivi con modalita Hegth-speed che raggiungono velocità di 400 kps al secondo.
Il numero di bit è stato portato in queste ultime revisioni da 7 a 10 bit di indirizzamento.

Il massimo numero di nodi e comunque limitato dalle capacita parassite introdotte dai dispositivi collegati, la capacita totale tra SSD e SCL e limitata a 400 pF e le resistenze di pull-up devono essere quindi opportunamente dimensionate su questo dato.
Una scheda MuIn permette di collegare fino a 4 dispositivi I2C tramite i pin è possibile fornire una alimentazione di 5V oppure e possibile fornire alimentazione esterna ai dispositivi purche ci si ricordi di collegare il piedino GND a massa.

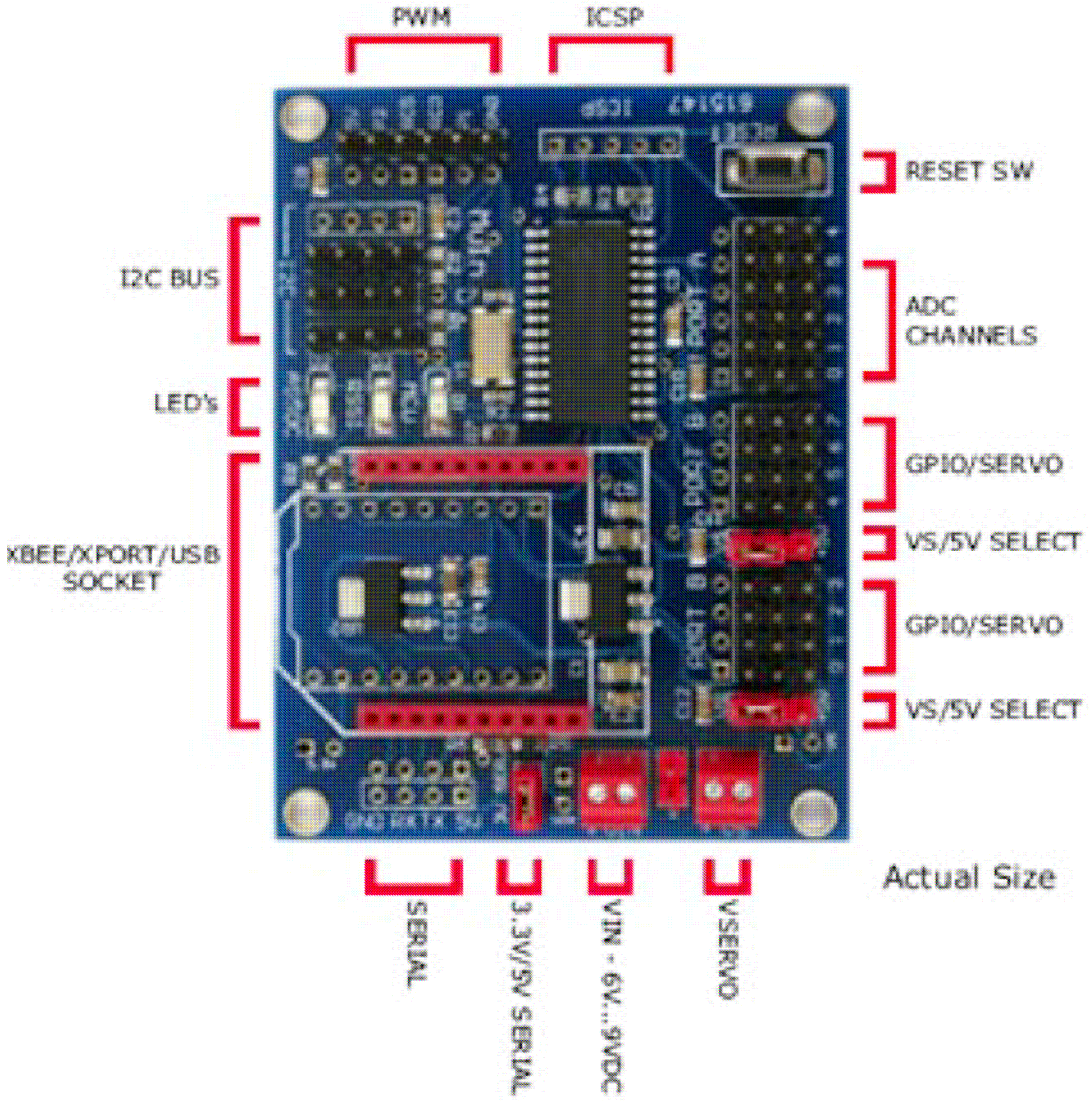
Di seguito lo schema dei pin in ingresso al Bus I2C:



La scheda MuIn è equipaggiata con un potente PIC18F2520 con un clock di 40MHz.
E' capace di pilotare due Ponti-H tramite i due canali PWM e i due pin di Enable per alimentare 2 motori CC.
Puo' leggere fino a 5 dispositivi analogici come sonde termometriche, sensori analogici, potenziometri, ad una risoluzione di 10Bit per canale.
Con la Porta B, puo' pilotare 4/8 servocomandi R/C oppure puo' leggere e scrivere su 4/8 porte IO.

Con il Bus I2C puo' controllare quasi tutte le periferiche I2C, inviando comandi tramite la connessione seriale.
Con alcuni comandi speciali, implementati nel firmware, e' possibile utilizzare facilmente dispositivi I2C.
Per una connessione Ethernet (e' necessarrio l'adattatore 990.007), in questo modo e' possibile dialogare con la MuIn tramite rete LAN o Internet.
Con la scheda 990.004 convertitore USB-Seriale, si ottiene un collegamento USB e si alimenta la scheda nello stesso momento.

Di seguito lo schema del circuito MuIn e del Bus I2C, le specifiche tecniche e le caratteristiche principali della scheda.



MuIn

Specifiche Tecniche della scheda:

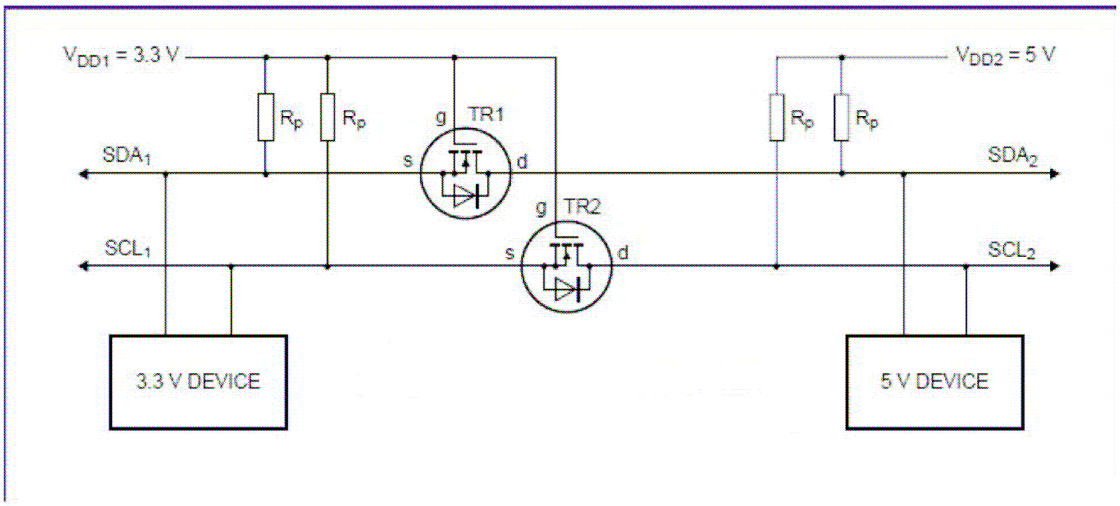
•MCU: Microchip PIC18F2520
•5.0V Power: 250mA
•3.3V Power 250mA
•Servo: 500 to 2500 us
•PWM: 2.44/9.77/39.4KHz selezionabile
•Serial Speed: up to 115.2K selezionabile
•Dimensioni: 52 x 68 mm

Caratteristiche:

•Potente microcontrollore PIC serie 18 a 40MHz
•Connessione Wireless, Ethernet, USB, TTL (con dispositivi opzionali)
•Interfaccia Serial I2C
•Regolatori low drop-out da 3.3V e 5.0V on board
•Frequenze PWM elevate, fino a 39.4KHz
•Seriale ad alta velocita', fino a 115.2K
•3 LED per: ASSOC, RSSI e stato del microcontrollore
•Connettore ICSP on board (per la programmazione del PIC18)
•Connettori +5V, +VSERVO e GND
•Linea +5V/+VSERVO selezionabile tramite jumpers
•Connettore per alimentazione SERVO, separato

2,6
Connessione dell'accelerometro con la MuIn

L'accelerometro deve essere connesso alla scheda MuIn considerando una alimentazione di 3.3 V.
Poiché i pin dell' interfaccia I2C sono alimentati a 5V il collegamento diretto non è possibile.
Si può risolvere il problema introducendo un'alimentazione esterna di 3.3V oppure si può considerare l'apposita uscita della MuIn stessa, che prevede una alimentazione a 3.3V.
La MuIn inoltre lavora con livello logico uguale ad 1 per 5V mentre per l'accelerometro lo stesso livello logico risulta pari a 3.3V.
Se i due dispositivi venissero collegati direttamente un 1 proveniente dall'accelerometro, risultato di una tensione di 3.3V, verrebbe rilevato dalla scheda MuIn come uno 0 che necessita di 5.0 V per mappare il livello logico 1.
Per questi motivi viene introdotto il seguente circuito elettrico utile all'adattamento dei livelli logici:



Circuito per l'adattamento dei livelli logici

2,7
Protocollo ZigBee

L'insieme di protocolli di comunicazione ad alto livello che utilizzano piccole antenne digitali a bassa potenza e basato sullo standard IEEE 802.15.4 per wireless personal area networks (WPAN) viene definito protocollo Zigbee.
Approvato il 14 dicembre del 2004 il protocollo e disponibile per membri di ZigBee Alliance.
Un’associazione non-profit di circa 150 aziende (Mitsubishi, Philips, Samsung, Siemens…) che definisce e sviluppa il protocollo ZigBee dal livello fisico fino a quello applicativo.
E' un protocollo per reti wireless, specificatamente progettato per reti di controllo e sensori a bassa velocità di dati.
Ci sono un gran numero di applicazioni che possono beneficiare del protocollo ZigBee: reti di automazione industriale, sistemi di sicurezza per casa, misurazione remota e periferiche per PC.
Il protocollo opera su frequenze radio assegnate a scopi industriali scienntifici e medici, 868 MHz in Europa, 915 MHz negli Stati Uniti e 2,4 GHz nella maggior parte del resto del mondo.
Questa tecnologia ha lo scopo di essere più semplice e più economica di altre WPAN come, ad esempio, Bluetooth.
Inoltre il protocollo presenta diversi vantaggi è affidabile, a basso costo,a bassa complessità,supporta un elevato numero di nodi, offre interoperabilità, la durata delle batterie offrendo consumi limitati ed è un protocollo sicuro.
I protocolli ZigBee sono progettati per l'uso in applicazioni embedded che richiedano un basso transfer rate e bassi consumi.
L'obiettivo attuale di ZigBee è di definire una Wireless mesh network non mirata, economica e autogestita.
Confrontato con gli altri protocolli wireless (WiFi, BlueThooth,) lo ZigBee offre bassa complessità, richiede risorse ridotte e più importante ha un set standard di specificazioni.
Esistono tre differenti tipi di protocolli ZigBee, essi sono:
ZigBee Coordinator (ZC): è il dispositivo più "intelligente" tra quelli disponibili, costituisce la radice di una rete ZigBee e può operare da ponte tra più reti. Ci può essere un solo Coordinator in ogni rete.

Esso è inoltre in grado di memorizzare informazioni riguardo alla sua rete e può agire come deposito per le chiavi di sicurezza.
ZigBee Router (ZR): questi dispositivi agiscono come router intermedi passando i dati da e verso altri dispositivi.
ZigBee End Device (ZED): includono solo le funzionalità minime per dialogare con il suo nodo parente (Coordinator o Router), e risultano più economici rispetto ai precedenti.
Lo ZigBee e' basato sulle specifiche definite dallo standard IEEE 802.15.4 che fornisce una metodologia standard per funzioni, incluse la formazione della rete, i formati dei messaggi e la ricerca dei dispositivi nella rete.
I protocolli si basano su ricerche relative ad algoritmi di routing (Ad-hoc On-demand Distance-Vector) al fine di costruire reti ad hoc per nodi a bassa velocità.
Lo IEEE 802.15.4 definisce tre bande di frequenze operative ognuna con un numero fissato di canali.
Può supportare sia reti Beacon-Embeded che reti non-Beacon-Embeded in queste ultime viene utilizzato per l'accesso al canale il meccanismo CSMA\CA cioè i nodi controllano il canale verificando che esso sia libero prima di trasmettere, i Router vengono tenuti sempre con ricevitori attivi, risultano cioè reti miste, alcuni dispositivi sono disposti a ricevere sempre mentre altri si attivano solo se stimolati da fattori esterni.
Come esempio si consideri la lampada sempre pronta ad accendersi perchè collegata alla rete elettrica, e l'interruttore inattivo finché qualcuno non pigi il pulsante, a questo punto viene trasmesso il messaggio, riceve il segnale di ritorno e ritorna inattivo.
Si può considerare la lampada come uno ZR e l'interruttore come uno ZED.
Per reti di tipo Beacon Embeded invece, vengono trasmessi periodicamente dei Beacon per segnalare la loro presenza ai nodi, tra un messaggio e un altro i nodi posso cambiare modo per risparmiare energia.
In generale questi protocolli minimizzano i tempi di attività del radiotrasmettitore.
ZigBee deve inoltre rispettare le norme descritte nel protocollo IEEE 802.15.4 esso specifica il protocollo del livello fisico (PHY) e del livello data (MAC).

Capitolo 3
IL MODELLO MATEMATICO DEL SISTEMA

3,1
Modello dinamico discreto a un asse

La metodologia usata per il filtraggio dei disturbi, può essere rappresenta e descritta da un particolare modello dinamico discreto, ove consideriamo inizialmente per semplicità una velocità costante:

$$X(t+1)= \Phi(t)*X(t)$$

In questa espressione lo stato del sistema al tempo t+1 è rappresentato dal prodotto tra la matrice Φ, e lo stato del sistema al tempo t.
La matrice Φ e detta matrice di transizione, permette di ottenere una previsione sullo stato, a partire dalla conoscenza dei valori di stato all'istante generico t.
Consideriamo una velocità costante lungo un solo asse, associamo allo stato X del nostro sistema un vettore a due elementi, il primo elemento e la posizione il secondo la velocità:

$$X(t) = \begin{vmatrix} \text{Posizione al tempo t} \\ \\ \text{Velocità al tempo t} \end{vmatrix}$$

La matrice di transizione descrive l'evoluzione del sistema, la transizione di stato tra un'epoca e l'altra.
In questo caso Φ è una matrice 2x2 del tipo:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Se facciamo il prodotto infatti tra queste due matrici, otteniamo le posizioni e le velocità che prevediamo di ottenere per l'epoca successiva, ovvero lo stato al tempo t+1.
Di seguito il vettore X(t+1):

$$X(t+1) = \begin{vmatrix} \text{Posizione al tempo t+1} \\ \text{Velocità al tempo t+1} \end{vmatrix}$$

Indiciamo con p le posizioni e con v le velocità, il sistema associato al prodotto della matrice Φ per il vettore di stato da luogo alle due espressioni:
p(t+1)=p(t)+v(t)*t
v(t+1)=v(t)
Se infatti consideriamo una velocità di 10m/s, l'oggetto all'istante t=0 in posizione p(0)=0; dopo un secondo si ha:
p(1)=p(0)+10=10 m
e
v(1)=v(0)=10 m/s.
Se assumiamo ora che la velocità possa oscillare leggermente, da un epoca all'altra, dobbiamo necessariamente introdurre un disturbo.

Tali disturbi sono dovuti nella realtà a rumori elettromagnetici o di misura.
Sommiamo all'ora un rumore bianco alla velocità ad ogni istante, tale rumore sarà dichiarato come errore di modello, introdotto per definire una variazione piccola dello stato.
Esattamente questo errore può essere definito a priori del filtraggio come la differenza tra lo stato del sistema e lo stato stimato del sistema a priori del filtraggio:

$$\varepsilon(t^-)=x(t)-x_{stimato}(t^-)$$

La nostra equazione di stato sarà all'ora descritta dalla seguente:

$$X(t+1)= \Phi(t)*X(t)+\varepsilon(t+1)$$

Con ε errore di modello.

Associamo in oltre a tale equazione una identità di stato che descrive le condizioni iniziali del sistema, considerando $\boldsymbol{X}(0)$ valor medio dello stato iniziale, $\varepsilon(0)$ valore medio dell'errore di modello iniziale si ha:

$$X(0)= \boldsymbol{X}(0)+\varepsilon(0)$$

Tale rumore bianco necessita di una descrizione stocastica.
L'analisi dei disturbi inerenti a questi errori di modello è trattata nel paragrafo 2.
Si deve ancora tener presente che in questo esempio teorico si e considerato solo un asse.
Il braccio roteante del nostro sistema, misura delle accelerazioni i cui risultati descrivono a partire dalle accelerazioni, lo stato di rotazione del braccio sul piano, risulta evidente quindi, che il concetto di modello dinamico discreto descritto fin ora deve essere esteso ai due assi.
Il modello dinamico discreto a due assi e trattato nel seguito in questo capitolo.

Inoltre nel nostro sistema dovremo tenere presente che il modello deve descrivere una accelerazione costante e una variazione della direzione della velocità lineare durante il movimento.
L'accelerazione risulterà una forza uscente, dal centro della circonferenza, la velocità tangente alla circonferenza.
Sembra allora opportuno espande il vettore di stato X, inserendo tra i suoi elementi l'accelerazione a(t)=a(0).

3,2
Descrizione stocastica dell'errore di modello

In teoria della probabilità e in statistica, viene introdotto il concetto fondamentale di varianza di una variabile aleatoria e della distribuzione di probabilità che essa segue.
Per ottenere una descrizione fondata dell'errore di modello, si deve tener presente di questo numero indicato generalmente con Var(X), ove X è la variabile aleatoria in questione, essa fornisce una misura di quanto siano variabili i valori assunti dalla X, ovvero di quando questi si discostano dalla media della variabile aleatoria stessa E[X].
La varianza della variabile aleatoria X è definita come il valore atteso, del quadrato della variabile aleatoria centrata in Y=X-E[X].
Ovvero:

$$Var(X)=E[Y^2]=E[(X-E[X])^2]$$

Spesso si preferisce la radice quadrata della varianza della variabile aleatoria X, che e detto scarto quadratico medio indicato in genere con σ, si può considerare con il termine σ^2 la varianza di una determinata variabile aleatoria.
La descrizione stocastica del modello preso in considerazione può essere riassunto nelle seguenti leggi:

$$E[\varepsilon(t)]=0$$

$$E[\varepsilon(t)\ \varepsilon(t^+)]=\delta_{tt+}\ Q$$

Dove Q è la matrice di covarianza del disturbo sullo stato, rappresenta la variabilità statistica del vettore dei disturbi sullo stato, ovvero la potenza del disturbo introdotto nel sistema che devia l'andamento delle variabili di stato.

La matrice Q risulta per il caso trattato nel precedente paragrafo:

$$Q \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{vmatrix}$$

Per il generico istante,

$$Q \equiv \begin{vmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{vmatrix}$$

Per t=0.

3,3
Modello dell'osservatore

Quando osserviamo una misura dobbiamo tenere presente delle incertezze, che rileviamo durante la misura stessa, questo rumore di misura deve essere considerato, ed è diverso dall'errore di modello descritto in precedenza.
Prima di tutto consideriamo la seguente equazione che descrive le osservazioni svolte dal sistema per la misura in forma matriciale:

$$Y(t)=C(t)*X(t)$$

La matrice Y rappresenta le osservazioni, risulta in effetti contenere i dati misurati dal sistema, in questo caso accelerazioni.
Lo stato di un sistema risulta infatti a volte misurabile direttamente, oppure può essere ottenuto tramite grandezze equivalenti, o il cui valore può essere ottenuto dalla combinazione di una o più variabili di stato, possibilmente sporcato da errori di misura o imprecisioni nella modellizzazione matematica del sistema.
Questa situazione viene definita nel contesto corrente dal vettore delle misure Y.
La matrice C viene definita come matrice delle uscite o matrice di trasformazione, descrive il valore assunto dalle variabili misurate in funzione del valore attuale della variabile di stato.
Come già commentato inizialmente in questo paragrafo, risulta necessario introdurre ancora un disturbo, un processo in grado di visualizzare gli errori di misura, aggiungiamo all'ora il termine $\underline{v}(t)$ che rappresenta appunto l'errore di misura, si ottiene l'equazione in forma matriciale dell'osservatore.

$$Y(t)=C(t)*X(t)+\underline{v}(t)$$

Questo processo $\underline{v}(t)$ ha le seguenti caratteristiche di tipo statistico:

$$E[\underline{v}(t)]=0$$

$$E[\underline{v}(t)\ \underline{v}(t^{+})]=\delta_{tt+}\ R$$

In questo caso la matrice R rappresenta la varianza del rumore sulle misure, ovvero la varianza statistica del vettore delle misure.
R rappresenta inoltre la potenza del rumore introdotto nella misura su ogni misurazione accessibile direttamente.
Inoltre si può notare che errore di modello e rumore di misura risultano processi incorrelati, si ha quindi la seguente:

$$E[\varepsilon(t)\ \underline{v}(t^{+})]=0$$

Se rimaniamo fedeli al modello trattato, una dimensione e con velocità costante, e consideriamo un sistema GPS in grado di osservare e misurare le posizioni, si ottiene una matrice delle uscite C a due elementi C={1,0} e la matrice di stato X(t) del precedente esempio.
Il sistema associato all'espressione in forma matriciale dell'osservatore relativo alla posizione sotto queste ipotesi risulta:

$$p(t+1)=p(t)+v(t) \text{ e } v(t+1)=v(t)+\varepsilon(t+1)$$

isoliamo $\varepsilon(t)$ nella seconda otteniamo

$$\varepsilon(t+1)=v(t+1)-v(t),$$

isoliamo ora v(t) nella prima otteniamo

$$v(t)=p(t+1)-p(t),$$

sostituendo quest'ultima nella precedente si ha:

$$\varepsilon(t+1)=v(t+1)-v(t)=p((t+1)+1)-p(t+1)-[\ p(t+1)-p(t)]=p(t+2)-2p(t+1)+p(t)$$

risulta infine:

$$\varepsilon(t+1) = p(t+2)-2p(t+1)+p(t)$$

quindi conoscendo le posizioni misure provenienti dallo strumento, in questo esempio il sistema GPS, al tempo t+2 al tempo t+1 e al tempo t si può ottenere il valore dell'errore di modello al tempo t+1.

Oppure, effettuando una traslazione temporale unitaria si ottiene:

$\varepsilon(t) = p(t+1)-2p(t)+p(t-1)$

Ovvero: *per conoscere l'errore di modello all'istante t si devono conoscere la posizione all'istante t, a quello precedente(t-1) e a quello successivo (t+1).*
In definitiva la considerazione che $\varepsilon(t)$ e $\underline{v}(t^+)$ siano rumori gaussiani bianchi incorrelati, tra di loro può essere schematizzata dal modello stocastico seguente:

$E[\varepsilon(t)\ \varepsilon(t^+)]=\delta_{tt+}\ Q$

$E[\underline{v}(t)\ \underline{v}(t^+)]=\delta_{tt+}\ R$

$E[\varepsilon(t)\ \underline{v}(t^+)]=0$

Cioè è da notare che per $t=t^+$ risulta:

$E[\varepsilon(t)\ \varepsilon(t^+)]=Q$

$E[\underline{v}(t)\ \underline{v}(t^+)]=R$

queste importanti relazioni permetteranno di analizzare nel seguito la matrice di varianza dell' errore sullo stato P, che riveste particolare importanza nell'evoluzione del filtro di Kalman.
Inoltre si può osservare che esiste una relazione tra errore di modello e il disturbo sullo stato.Tale relazione è descritta dall'equazione:

$\varepsilon(t^-)=k(y(t)-y_{stimato}(t^-))$

dove K e definito come guadagno del filtro di Kalman di cui in seguito si discuterà.

3,4
Estensione del modello ai due assi

Per ottenere un modello simile a quello descritto fino ad ora, ma che possa descrivere il movimento rotatorio del nostro braccio, per prima cosa dobbiamo estendere i concetti di vettore di stato X, alle due dimensioni, visto che il movimento avviene sul piano.
In questo nuovo modello teniamo ancora in considerazione un moto rettilineo a velocità quasi costante e introduciamo gli elementi $p_x(t)$, e $p_y(t)$, che rappresentano le posizioni sull'asse x e y rispettivamente e introduciamo gli elementi $v_x(t)$, $v_y(t)$, che rappresentano le due velocità negli assi x e y.
Verosimilmente il vettore di stato sarà fatto dai quattro elementi:

$$X(t) = \begin{vmatrix} p_x(t) \\ p_v(t) \\ v_x(t) \\ v_v(t) \end{vmatrix}$$

Per ottenere una forma matriciale dell'equazione,

$$X(t+1)= \Phi(t)*X(t)+\varepsilon(t+1)$$

si deve ridefinire anche la matrice di transizione $\Phi(t)$ che si presenta ora nella forma 4x4 esattamente con i seguenti valori,

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

In questo modo si ottengono delle equazioni separate per la trattazione sull'asse x, speculari a quelle su y, e identiche al caso di un singolo asse.
Cosi facendo inoltre, il problema viene nettamente separato in due problemi ad un solo asse, la cui somma forma risultati nel piano, come risulta consuetudine fare in fisica e in ingegneria.
Per quanto riguarda l'equazione dell'osservatore

$$Y(t)=C(t)*X(t)+\underline{v}(t)$$

ci si deve occupare della matrice delle uscite o matrice di trasformazine C, nel caso a singolo asse come già visto in precedenza visto che la posizione rilevata dal GPS riguardava solo la posizione sull'asse x, risultava C={1,0}, dato che ora le posizioni rilevate anno due cordinate il risultato di C e più complesso.
Ne risulta una matrice 2X4 della forma:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dobbiamo ora considerare che il nostro modello deve essere fatto si ha due dimensioni, ma deve permettere alla velocità di variare almeno in modulo, ed avere una accelerazione quasi costante.
Il modello completo relativo al braccio e utile per l'implementazione del filtro di Kalman è descritto nel seguito.

3,5
Il modello matematico ad accelerazione costante

Introduciamo adesso il concetto di accelerazione costante inerente al nostro progetto.
Il sistema rotatorio descritto nel capitolo due, può essere rappresentato fisicamente dalle leggi che governano moti circolari uniformi.
L'accelerazione del nostro sistema è una accelerazione costante, uscente dal centro della circonferenza disegnata dal braccio.
Le accelerazioni rilevate risultano altamente rumorose, e necessario allora introdurre nel termine dell'accelerazione rilevata una variazione piccola dovuta ad errori di modello.
Nel vettore di stato X(t) dell'equazione matriciale

$$X(t+1)= \Phi(t)*X(t)+\varepsilon(t)$$

deve essere inserito il termine $a_x(t)$, consideriamo il sistema ad una dimensione inizialmente, e per semplicità consideriamo una distanza temporale tra un epoca ed un altra pari ad una unita di tempo , $\Delta t=1$.
Le equazioni che descrivono il moto in una dimensione risultano descritte dalle tre equazioni seguenti:

$$p(t+1)=p(t)+v(t)$$

$$v(t+1)=v(t)+a(t)$$

$$a(t+1)=a(t)+ \varepsilon(t)$$

semplicemente all'accelerazione viene aggiunto un termine piccolo $\varepsilon(t)$ che rappresenta l'errore di modello descritto nei precedenti paragrafi.
La matrice di trasmissione Φ risultante sarà per una dimensione una matrice 3x3 e il vettore di stato X avrà dimensione 3.

Lo stato deve essere infatti descritto ora oltre che da posizione e velocità anche dall'accelerazione.
si ha:

$$X(t) = \begin{vmatrix} p_x(t) \\ v_x(t) \\ a_x(t) \end{vmatrix} \qquad \Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Per quanto concerne le osservazioni nell'equazione matriciale

$Y(t)=C(t)*X(t)+\underline{v}(t)$

e ipotizzando di rilevare le posizione con un sistema GPS il vettore C delle uscite risulta:

C={1,0,0}

A questo punto posso considerare che il nostro sistema esamina il rilevamento delle accelerazioni e non delle posizioni, in questo lavoro infatti non è presente un sistema GPS in grado di rilevare posizioni, bensì un accelerometro che rileva accelerazioni, il vettore delle uscite deve all'ora essere modificato.
Si ottiene:

C={0,0,1}

Il termine $\underline{v}(t)$ relativo al disturbo di misura, viene cosi aggiunto alle misure rilevate, relativamente alle accelerazioni, abbandoniamo cosi l'ipotesi introdotta del sistema GPS, e ci occupiamo invece di eliminare i disturbi dell'accelerometro in esame per ottenere delle accelerazioni pulite.

3,6
Modello applicativo

Estendiamo adesso il modello matematico ad accelerazione costante trattato in precedenza alle due dimensioni.
La descrizione completa dello stato del sistema, deve considerare per quanto detto i due assi cartesiani x e y.
Il modello matematico del sistema è:

Equazione di stato

$$X(t+1)= \Phi(t)*X(t)+\varepsilon(t)$$

Errore di modello

Equazione delle condizioni iniziali

$$X(0)= \boldsymbol{X}(0)+\varepsilon(0)$$

Disturbo sulla misura

Equazione di osservazione

$$Y(t)=C(t)*X(t)+\underline{v}(t)$$

Lo stato X(t) del sistema risulta infine descritto dal vettore che segue:

$$X(t) = \begin{vmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ v_x(t) \\ v_y(t) \\ a_x(t) \\ a_y(t) \end{vmatrix}$$

Dove:

X(t) rappresenta il vettore che descrive lo stato del sistema campione per campione in funzione del tempo.

$p_x(t)$ rappresenta il valore della posizione rispetto all'asse x in funzione del tempo.

$p_y(t)$ rappresenta il valore della posizione rispetto all'asse x in funzione del tempo.

$v_x(t)$ rappresenta il valore della velocità rispetto all'asse x in funzione del tempo.

$v_y(t)$ rappresenta il valore della velocità rispetto all'asse y in funzione del tempo.

$a_x(t)$ rappresenta il valore dell'accelerazione rispetto all'asse x in funzione del tempo.

$a_y(t)$ rappresenta il valore dell'accelerazione rispetto all'asse y in funzione del tempo.

La matrice di transizione risultante Φ di dimensione 6x6 è:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Infine il vettore delle uscite C risulta:

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Questo è il modello matematico che in effetti verrà utilizzato per progettare ed implementare il filtro di Kalman idoneo alla soluzione del problema dei disturbi in questo esperimento.

Capitolo 4
IL FILTRO DI KALMAN

4,1
Storia del filtro di Kalman

Il filtro di Kalman prende il suo nome da Rudolf Kalman.
La prima realizzazione pratica del filtro è stata sviluppata da Stanley Schmidt, che riconobbe l'applicabilità del costrutto matematico di Kalman ad un sistema di stime di traiettorie per eliminare alcuni disturbi.
Durante una visita presso il centro di ricerche Ames della NASA, Kalman presento le sue idee, Schmidt considero tale strumento una innovazione utile e la introdusse nel programma Apollo.
Inserì l'algoritmo nel computer di bordo che contribuì in effetti alla riuscita delle missioni.
Il filtro fù sviluppato in diversi articoli da Schmidt nel 1958 e da Kalman nel 1960 e ancora da Bucy nel 1961.
Altri prototipi del filtro di Kalman furono sviluppati in seguito.
Il modello, oggi conosciuto con il nome di filtro semplice di Kalman, e altri esempi sono: il filtro esteso di Schmidt, il filtro di informazione e diversi altri, detti a radice quadrata sviluppati in seguito da Bierman.
Una notevole applicazione riconducibile al filtro di Kalman è anche l'anello ad aggancio di fase PLL.
Il Phase-locked loop PLL, è un circuito elettronico usato ormai in innumerevoli applicazioni radio di calcolatori elettronici e di trasmissione dati.
Inoltre rappresenta una delle più grandi innovazioni nel campo della misura, uno strumento matematico di notevole entità, dimostrazione della grande intuizione dell'uomo e del senso di profondo rispetto per la scienza e l'ingegneria.
Infine, frutto dell'innata curiosità dell'essere umano, risultò lo strumento più adeguato per risolvere il particolare problema della stima di uno stato, a partire da informazioni affette da rumori gaussiani bianchi a media nulla e varianza variabile.

4,2
Introduzione al filtro di kalman: gli ingredienti fontamentali

Dopo aver analizzato lo stato dell'arte degli ultimi anni riguardante lo studio della dinamica di un oggetto e il calcolo della sua traiettoria, si è deciso di utilizzare il filtro di Kalman per la stima della traiettoria del braccio roteante.
Dopo aver preso in considerazione la dinamica del sistema, l'algoritmo si basa su di essa per ottenere a partire dalle misure provenienti dal sensore, la stima della traiettoria reale del moto.
Lo scopo di tale algoritmo e quella di predire in tempo reale, la traittoria di un corpo in movimento, aggiornando la stima all'istante precedente sulla base delle nuove osservazioni e di un modello dinamico a priori.
Questa stima è sub-ottimale rispetto all'uso congiunto di tutti i dati in post-processamento, tramite una soluzione di minimi quadrati.
Il filtro di Kalman è una tecnica per la risoluzione del problema Gaussiano lineare quadratico, che può essere tradotto in pratica, nella stima dello stato istantaneo di un sistema dinamico a partire dalla sua uscita.
Lo stimatore e statisticamente ottimale rispetto a qualunque funzione quadratica che stimi l'errore.
Si supponga di conoscere, le variabili misurate in funzione delle variabili di interesse.
Il filtro di Kalman si occupa della soluzione del problema inverso, inverte infatti questa relazione funzionale stimando le variabili indipendenti, come funzione inversa delle variabili dipendenti (misurabili).
Dato il sistema dinamico:

$$dX=f(x(t),u(t),t)$$
$$y=h(x(t),u(t),t)$$

Il filtro si occupa di risalire allo stato x(t) a partire dall'uscita y(t) quando questi sono perturbati da rumore gaussiano.
La costruzione del filtraggio dei dati avviene sulla base di una media pesata tra il prossimo valore predetto e il prossimo valore stimato.

L'algoritmo e composto da alcune equazioni matematiche che effettuano operazioni ricorsive per dare un efficace soluzione al metodo dei minimi quadrati.
Il filtro di Kalman necessita per la sua costruzione di tre ingredienti fondamentali legati in maniera vincolante al sistema che si sta studiando.
Per prima cosa abbiamo bisogno di una serie di misure sul sistema da stimare, nel nostro caso il sistema in esame e un braccio roteante su cui viene fissato l'accelerometro, e i dati trasferiti dalla MuIn al PC rappresentano le misure richieste dal filtro che in effetti saranno filtrate.
Poi abbiamo bisogno di un modello matematico descrittivo del sistema che nel nostro caso e stato ampiamente discusso nel capitolo 3.
Infine come ingrediente fondamentale il filtro vuole la conoscenza del modello statistico del sistema, che nel nostro caso e stato trattato nel paragrafo 3,2 e 3,3 del precedente capitolo.

4,3
Il filtro di kalman a tempo discreto DKF

Il problema che ci poniamo e quello di valutare lo stato X di un sistema tempo discreto descritto dalla seguenti equazioni alle differenze:

$$X_k = \Phi_{k-1} X_{k-1} + B_{k-1} U_{k-1} + \varepsilon_{k-1}$$
$$Y_k = C_k X_k + v_k$$

Dove:
k è il generico istante di campionamento.
X_k è il vettore di stato.
Φ_k è la matrice di transizione dello stato.
U_k è il vettore degli ingressi.
B_k è la matrice degli ingressi.
ε_k è il disturbo sullo stato.
Y_k è il vettore delle misure.
C_k è la matrice delle uscite.
v_k è il rumore di misura.

Inoltre dobbiamo considerare:

Q è la matrice di covarianza del disturbo sullo stato.
R è la matrice di covarianza del rumore sulla misura.
P è la matrice di covarianza dell'errore di stima dello stato.
K è la matrice di correzione dello stato.

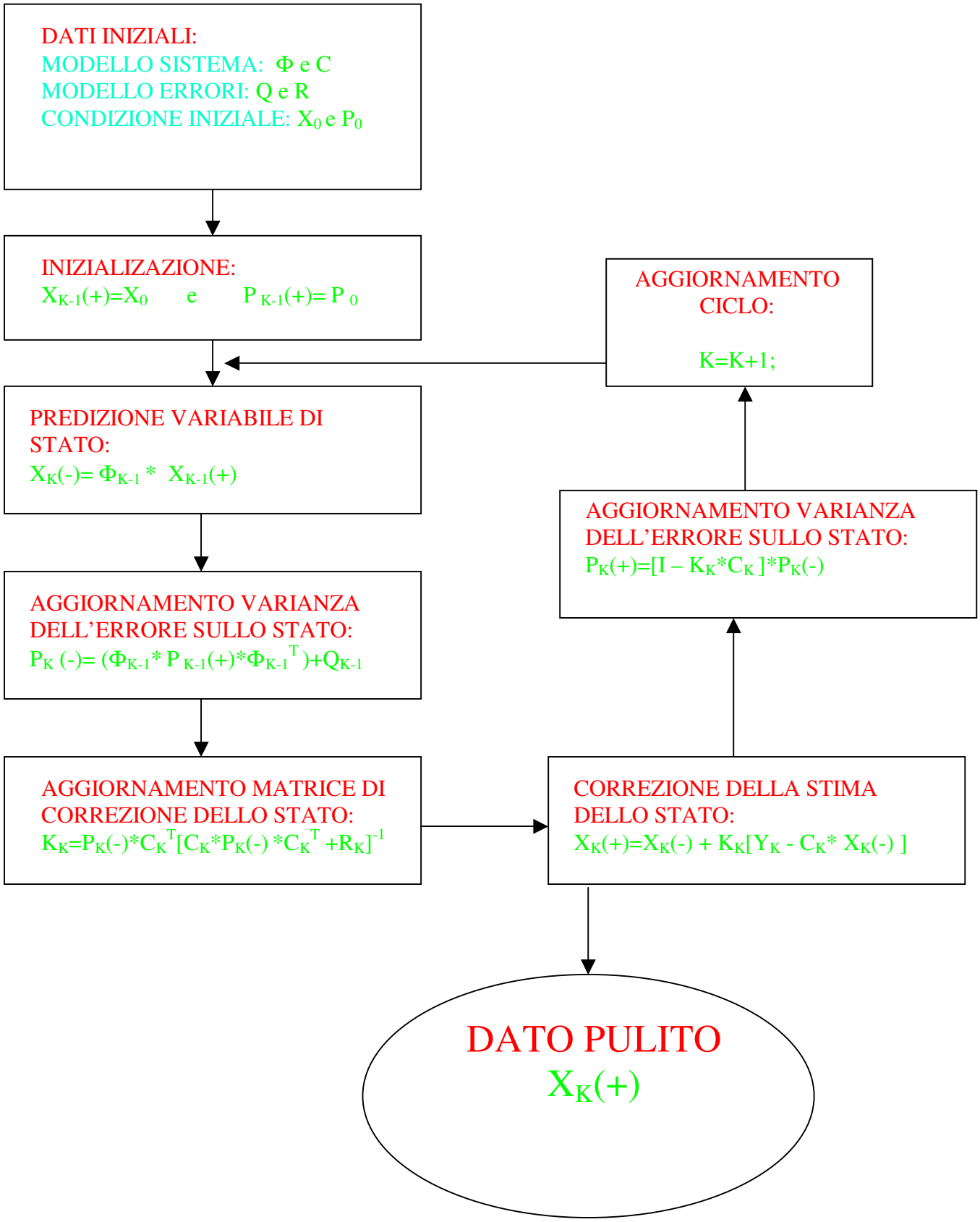
Q R e P sono state introdotte nel precedente capitolo.
K prende il nome di Guadagno di Kalman e indica il livello di fiducia assegnata alla misura rispetto alla fiducia assegnata alla stima dello stato in base al valore precedente e al modello matematico che ne rappresenta l'evoluzione.
Tanto maggiore è il valore di *K*, tanto minore fiducia merita la stima basata

sul modello rispetto alla misura riportata.
Questa considerazione è la base del progetto e sarà meglio evidenziata nel seguito.
L'algoritmo del filtro di Kalman si può schematizzare in cinque passi fondamentali:

PASSO 1: INIZIALIZZAZIONE ALGORITMO
PASSO 2: PREDIZIONE DELLO STATO ATTUALE
PASSO 3: AGGIORNAMENTO DELLA MATRICE DI CORREZIONE
PASSO 4: STIMA DELLA VARIABILE DI STATO
PASSO 5: PREPARAZIONE CALCOLO PROSSIMO CAMPIONE

Questi passi si ripetono campione per campione ed in maniera ricorsiva, realizzando di fatto un sistema retroazionato in grado di predire la stima istante per istante dello stato del sistema.
Di seguito lo schema principale dell'algoritmo:
Tenere presente che il simbolo (+) e da intendersi dopo la stima, a posteriori, mentre (-) e da intendersi prima della stima a priori.

SCHEMA COMPLETO DELL'ALGORITMO



4,4
Inizializzazione del filtro di kalman

Le matrici che rappresentano l'evoluzione dello stato sono la matrice di transizione Φ, che rappresenta in effetti le modalità di andamento libero dello stato a partire da una condizione iniziale, e la matrice delle uscite C che descrive il valore assunto dalle variabili misurate in funzione del valore attuale della variabile di stato X.
Risulta necessario possedere tali matrice per inizializzare il filtro di Kalman.
Le matrici che rappresentano i disturbi sono Q ed R.
La matrice Q rappresenta il termine che descrive il disturbo sullo stato, rappresenta ovvero la variabilità statistica del vettore dei disturbi sullo stato, vettore ha media nulla.
Descrive la potenza del disturbo introdotto nel sistema, che devia l'andamento delle variabili di stato, rispetto a quello prevedibile dalla conoscenza del vettore degli ingressi e dalla legge lineare che ne governa l'evoluzione.
Nel caso in esame il disturbo e rappresentato dall'errore di modello trattato nel precedente capitolo e dovuto alla doppia integrazione dell'accelerazione per ottenere la posizione.
La matrice R rappresenta un ben diverso disturbo dovuto al rumore sulla misura, in quando l'accelerometro oscilla durante il moto circolare attorno all'asta, tale rumore viene inoltre amplificato dal rumore elettromagnetico insito nel circuito, e dalla trasmissione del dato al PC.
In teoria la matrice di covarianza del rumore sulle misure R, rappresenta la variabilità statistica del vettore dei disturbi di misura (vettore a media nulla) e rappresenta la potenza del disturbo sulla misura introdotta su ciascuna delle misure accessibili.
E' necessario aggiornare tali matrici.
Si usa inoltre il valor medio dello stato iniziale x_0 per inizializzare, nell'algoritmo il valore dello stato stimato all'istante k-1.
Come primo valore per P può essere utilizzato un valore qualsiasi, ad esempio una matrice unitaria.
Le matrici Q ed R sono solitamente utilizzate e definite come matrici costanti, nel nostro caso sono stati assegnati dei valori pari a 0.01^2 per R e 0.01 per Q.

Talvolta, può essere consigliabile modificare Q ed R per tener conto di particolari fattori, come ad esempio, una condizione di maggiore disturbo sullo stato del sistema, in presenza di maggiori errori sulla misura, in particolari punti, motivati ad esempio dal malfunzionamento di un sensore in un particolare tratto del tragitto, ma tale situazione non è stata trattata nel caso preso in esame.

4,5
Predizione dello stato

La seguente equazione da una prima stima dello stato del sistema:

$$X_K(-)= \Phi_{K-1} * X_{K-1}(+)$$

In base alle informazioni certe che si hanno dal modello, si può in effetti predire la variabile di stato.
Questa variabile $X_K(-)$ rappresenta in effetti lo stato del nostro accelerometro in orbita sull'asta prima del filtraggio nota il simbolo(-). Questa stima rappresenta le posizioni, le velocità, e le accelerazioni lineari del braccio in rotazione al momento k.
La moltiplicazione tra la matrice di transizione e la stima dello stato precedente $X_{K-1}(+)$ sono matrici note, la prima Φ_{K-1} perché è già stata inizializzata al passo precedente per il primo campione e aggiornata al tempo k-1 per tutti gli altri campioni, la seconda $X_{K-1}(+)$ e la stima a posteriori del filtraggio nota il simbolo (+) all'epoca precedente, pertanto conosciuta.

4,6 Aggiornamento della varianza dell'errore sullo stato

La seguente equazione si preoccupa di calcolare la matrice di covarianza dell'errore di stima dello stato, al tempo k, prima del filtraggio, in base all'ultima stima del disturbo sullo stato.
Questa matrice sarà poi utile ai fini del calcolo del guadagno del filtro.

$$P_K(-) = (\Phi_{K-1} * P_{K-1}(+) * \Phi_{K-1}^T) + Q_{K-1}$$

Si può osservare, che nella prima formula, la legge di evoluzione dello stato, non si è tenuto conto del contributo dovuto al termine U_{k-1} dovuto agli ingressi.
Se gli ingressi sono conosciuti, la legge di evoluzione dello stato deve essere applicata nella sua versione completa come visto nel paragrafo 2 e qui riportata:

$$X_k = \Phi_{k-1} X_{k-1} + B_{k-1} U_{k-1} + \varepsilon_{k-1}.$$

Al contrario, se la matrice degli ingressi non è nota come nel nostro caso, è necessario considerare tale contributo come un disturbo non misurabile e quindi da inserire nella matrice Q che contribuisce al calcolo di P in questa equazione.
La legge di aggiornamento della matrice di varianza dell'errore sullo stato può essere interpreta come segue:

se $Q=0$, $P \to 0$ tanto più è stabilizzante Φ.
se $Q \to \propto$, $P \to \propto$ tanto più è stabilizzante Φ.

Maggiore e Q maggiore sarà l'incidenza del disturbo sullo stato nell'errore complessivo di stima, minore e Q minore sarà l'incidenza.

4,7
Aggiornamento della matrice di correzione dello stato

La seguente equazione calcola il guadagno del filtro di kalman:

$$K_K=P_K(-)*C_K^T[C_K*P_K(-)*C_K^T+R_K]^{-1}$$

K dipende effettivamente da P e da R, risulta ovvero strettamente legata a disturbi di modello e di misura.
Se consideriamo per un attimo delle uscite unitarie e quindi poniamo la matrice C uguale alla matrice unitaria:

$C=I$

si ottiene:

$K=P/(P+R)$

La legge di aggiornamento della matrice di correzione dello stato risulta all'ora di facile interpretazione:

se $P>>R$ $K->1$

se $P<<R$ $K->0$

Cioè se la matrice di covarianza dell'errore di stima è molto maggiore della matrice di covarianza dell'errore sulla misura il guadagno è unitario e il filtro da piena fiducia alla misura.
Se invece risulta l'errore di misura molto alto rispetto all'errore di stima, il guadagno tende a 0 e il filtro da piena fiducia alla previsione della stima.
Il guadagno di Kalman rappresenta quindi l'affidabilità che ha la misura rispetto alla fiducia posta nella propagazione del modello.
Si apprezza meglio nel successivo paragrafo il peso della matrice K.

4,8
Stima dello stato post-filtraggio

Dopo aver calcolato il guadagno K si può aggiornare lo stato del sistema, si considera la predizione dello stato X(-) e la misura ottenuta dall'accelerometro.

$$X_K(+)=X_K(-) + K_K[Y_K - C_K * X_K(-)]$$

La differenza tra le misure e la stima dello stato viene moltiplicata per il guadagno, i cui valori come visto prima variano da 0 a 1, secondo i valori di P ed R, precisamente se il guadagno tende a zero il filtro pone poca fiducia alla misura e si affida al modello, viceversa il filtro da fiducia alla misura ritenendo il dato poco affetto da rumore.
Un valore intermedio del guadagno prende in considerazione sia la misurazione effettuata che la previsione del modello.

se K->1 fiducia alla misura
se K->0 fiducia alla stima

Lo stato X(+) viene aggiornato a seconda del peso che ad ogni passo assume il guadagno K.

4,9
Aggiornamento della matrice di varianza dell'errore sullo stato a posteriori

L'aggiornamento della matrice di varianza dei disturbi sullo stato viene fatta a posteriori, utilizzando le informazioni contenute nella matrice K, sulla affidabilità della misura rispetto alla qualità della predizione dello stato.
Come si ricorda dal passo precedente, la matrice K indica la fiducia posta dall'algoritmo nella misura.

$$P_K(+)=[I - K_K*C_K]*P_K(-)$$

Qui si considera la matrice di varianza P(-) la matrice delle uscite C e il guadagno K.
Con K tendente a zero, la matrice P rimane sostanzialmente invariata nell'aggiornamento dell'algoritmo da un passo al successivo.
Infatti se ipotizziamo K=0 all'istante generico k si ha:

P(+)=[I - KC]P(-)=IP(-)=P(-)

quindi:

se K->0 matrice P invariata
se K->1 variazione massima di P

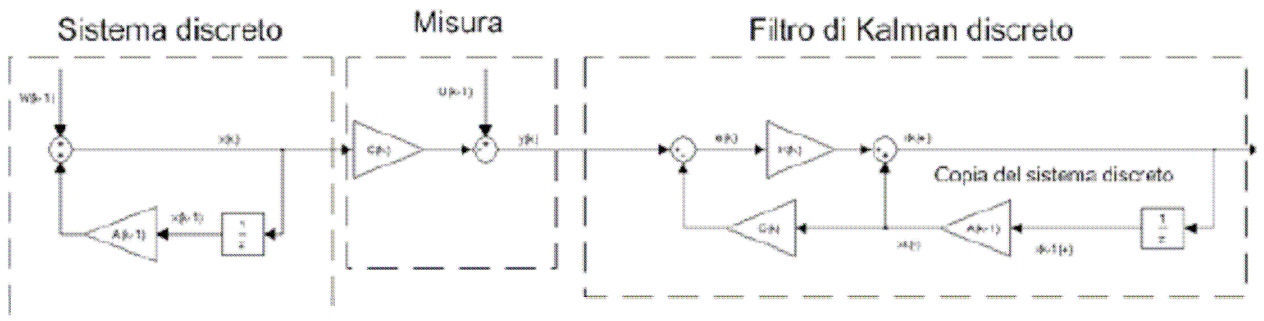
4,10
Aggiornamento del ciclo

Tutti i campioni misurati dall'accelerometro devono essere filtrati, dopo che il campione k-1 e passato attraverso l'algortimo bisogna aggiornare al nuovo istante k prima di predire il nuovo valore e rilanciare l'algortimo:

$$K=K+1$$

Questo sistema comporta quindi una retroazione del modello di misura e del filtraggio, che permette in effetti di risalire alla misura dello stato all'istante k a partire dai calcoli effettuati all'istante precedente.
Iterando il discorso per ogni campione, tutte le misure vengono in fine filtrate e con ottima approssimazione pulite dagli errori di modello e dai disturbi di misura.
Ecco di seguito lo schema a blocchi relativo al filtro e al modello di misura.

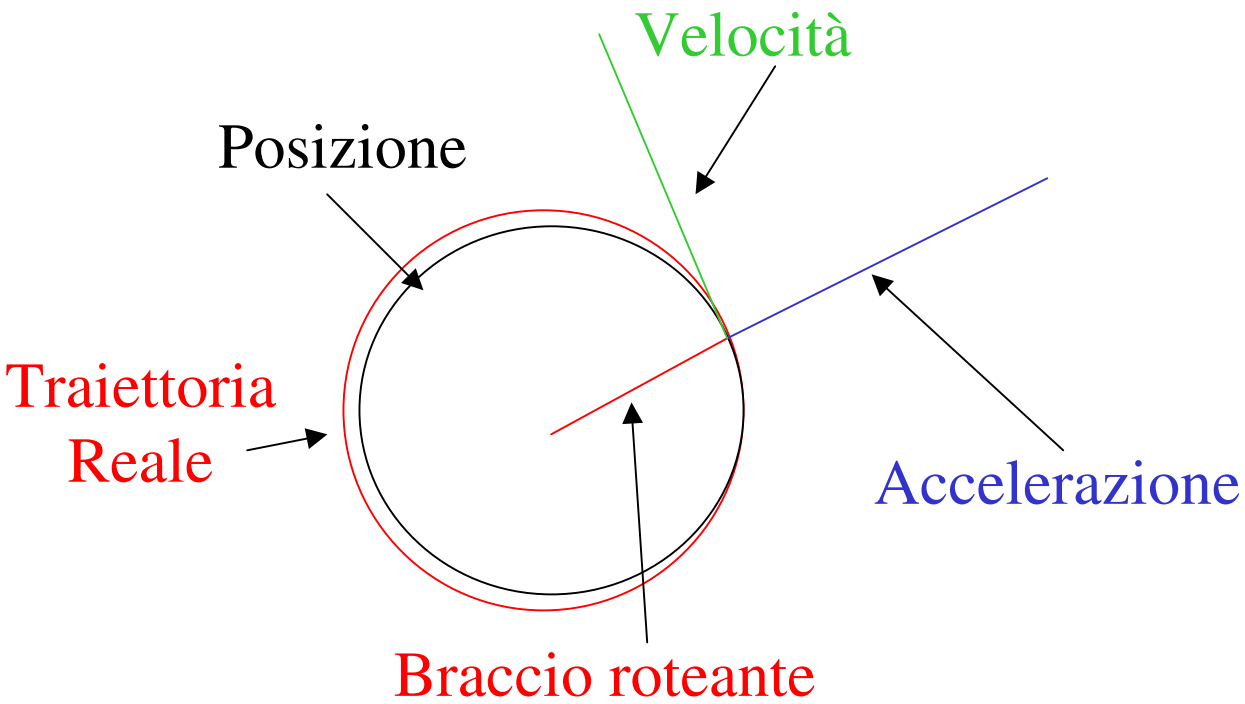
Schema a blocchi del sistema, del modello di misura e del DKF



Capitolo 5
IMPLEMENTAZIONE DEL FILTRO

5,1
Strumenti di sviluppo

Per realizzare il filtro è stato usato il Visual C# 2008 Express Edition che rappresenta un potente strumento di programmazione.
Il linguaggio utilizzato e il C#, che è un linguaggio orientato agli oggetti, con cui sono stati progettati i sistemi di comunicazione con il sensore le strutture grafiche per la visualizzazione delle accelerazioni, il calcolo e la grafica relativa alle velocità e alle posizioni, il modello di salvataggio dei dati, il modello matematico applicato all'accelerometro del filtro di Kalman.
Si è realizzata una maschera in cui si ottiene un grafico che mette in evidenza l'andamento delle accelerazioni misurate da cui si ricavano tramite modelli matematici le relative curve di velocità e posizione.
In figura è rappresentato lo schema del grafico sviluppato con il Visual Studio, le linee blu rappresentano le accelerazioni mentre quelle verdi sono relative alle velocità, in nero le posizioni calcolate.



5,2
Implementazione delle matrici del filtro

La stesura del codice relativa al filtro e contenuta nella classe Kalman inserita nel Name-Space g_meter del progetto, di seguito il codice relativo alla definizione di tale classe:

```
namespace g_meter
{
    public class Kalman
    {.............................................................}
```

La classe si occupa di relazionarsi con il programma di acquisizione dei dati e di implementare il filtraggio.
Contiene infatti un metodo che permette di inizializzare componenti statici come il raggio dell'orbita, le velocità iniziali medie e altri fattori che riguardano in misura stretta le condizioni relative al sistema di misura.
Vengono definite al suo interno tutte le matrici utili al funzionamento dell' algoritmo.
Vengono definiti i due vettori di stato X(+) e X(-):

Vettore di stato(+) dimensione 6x1:

```
public double[] vettorestatopiù = new double[6];
```

Vettore di stato(-) dimensione 6x1.

```
public double[] vettorestatomeno = new double[6];
```

Il vettore delle misure Y
Vettore di uscita(-) dimensione 6x1:

```
public double[] vettoremisure = new double[2];
```

La matrice di transizione Φ
matrice di transizione Φ dimensione 6x6 con relativi valori:

```
public double[,] matricestato = new double[6, 6]
{
{ 1,0,0,0,0,0 }, { 0,1,0,0,0,0 }, { 1,0,1,0,0,0 },
{ 0,1,0,1,0,0 },{ 0,0,1,0,1,0 },{ 0,0,0,1,0,1 }
};
```

Tre matrici di varianza dell'errore sullo stato P, P(+),P(-) tutte e tre di dimensioni 6x6:

```
public double[,] matricevarianza = new double[6, 6]
{
{ 0.1, 0, 0,0,0,0 }, { 0, 0.1, 0,0,0,0 }, { 0, 0, 0.1,0,0,0 },
{0, 0, 0, 0.1,0,0 },{ 0, 0, 0,0,0.1,0 },{ 0, 0, 0,0,0,0.1 }
};
public double[,] matricevarianzapiù = new double[6, 6];
public double[,] matricevarianzameno = new double[6, 6];
```

Matrice di covarianza sul disturbo Q dimensione 6x6 con relativi valori:

```
public double[,] matricecovarianza = new double[6, 6]
{
{ 0.01, 0, 0,0,0,0 }, { 0, 0.01, 0,0,0,0 }, { 0, 0, 0.01,0,0,0 },
{ 0, 0, 0,0.01,0,0 },{ 0, 0, 0,0,0.01,0 },{ 0, 0, 0,0,0,0.01 }
};
```

Matrice delle uscite C dimensioni 2x6 con relativi valori:

```
public double[,] matriceuscite = new double[2, 6]
{
{ 0, 0, 0, 0, 1, 0 }, { 0, 0, 0, 0, 0, 1 }
};
```

Matrice di varianza del rumore sulle misure R dimensioni 2x2 con relativi valori:

```
public double[,] matricevarianzarumore = new double[2, 2]
{ { 0.01*0.01, 0}, { 0,0.01*0.01  } };
```

Matrice di guadagno del filtro K di dimensioni 6x2:

```
public double[,] k = new double[6, 2];
```

Matrice unitaria I di dimensioni 6x6:

```
public double[,] I = new double[6, 6]
{
{ 1, 0, 0,0,0,0 }, { 0, 1, 0,0,0,0 }, { 0, 0, 1,0,0,0 },
{ 0, 0, 0,1,0,0 },{ 0, 0, 0,0,1,0 },{ 0, 0, 0,0,0,1 }
};
```

Le due variabile di uscita Ax(stima),Ay(stima):

```
public double aXstimato;
public double aYstimato;
```

Tutte le matrici e i valori del filtro sono progettati adeguatamente per il braccio roteante e permettono lo sviluppo degli step del filtro di Kalman, nel seguito del codice e come variabili locali vengono definite tutte le matrici di supporto.

Quelle definite in questo paragrafo risultano essere invece variabili globali utilizzabili in qualunque step del filtro e aggiornabili ad ogni loop. Come descritto in precedenza infatti il filtro di Kalman e basato sulla retroazione, alcune matrici possono essere aggiornate per la stima dello stato campione per campione, tale struttura retroazionata permette allora di ottenere misure dell'accelerazione stimate sempre aggiornate.

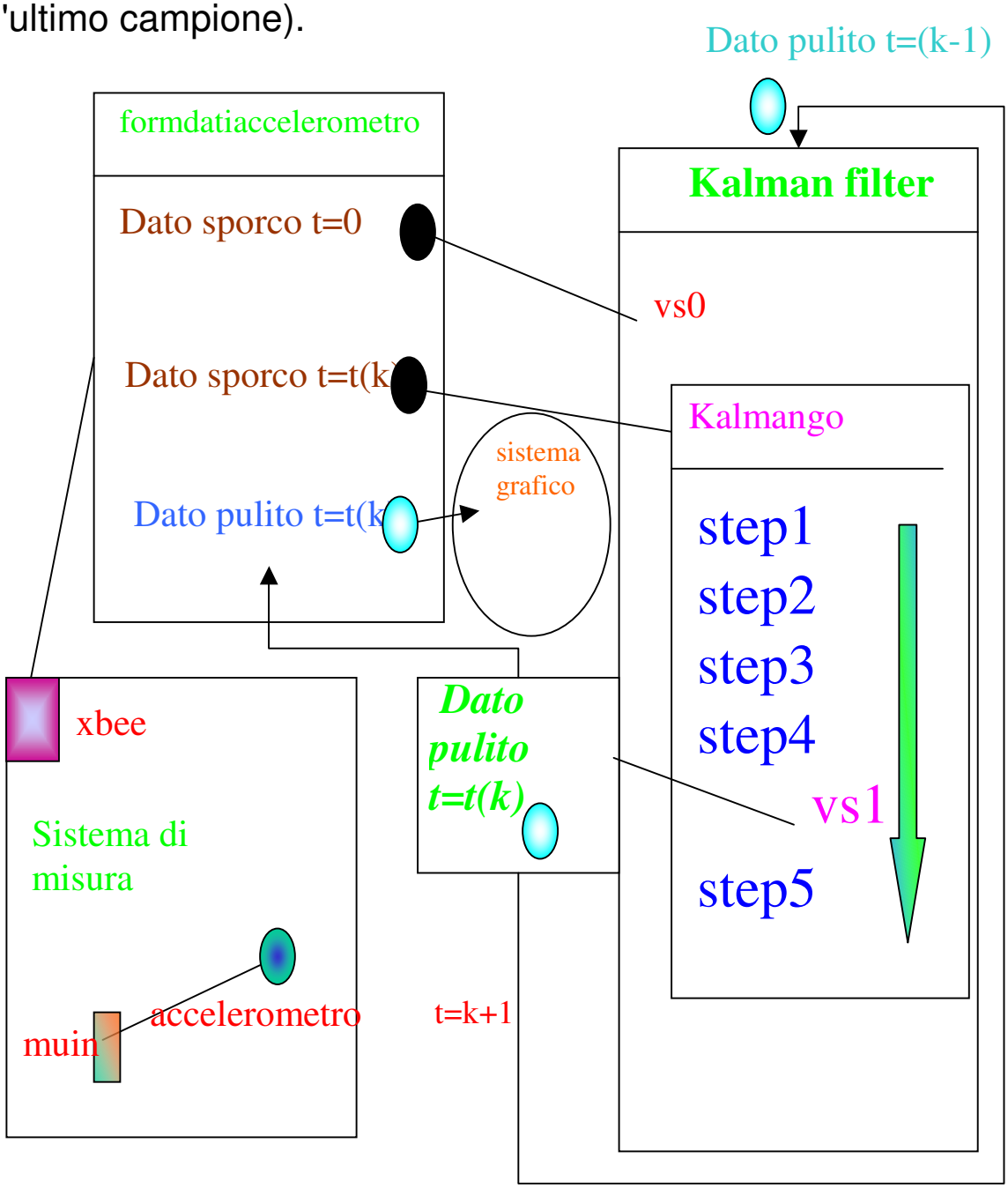
5,3
Il metodo Kalmango

Il metodo Kalmango rappresenta il cuore del progetto, esso si occupa di prelevare in entrata le accelerazioni le velocità e le posizioni sull'asse X e Y. Le accelerazioni sono affette da rumore quando entrano nel filtro, i metodi che vengono eseguiti sono i seguenti:
step1() si occupa dell'aggiornamento dello stato,
step2() si occupa dell'aggiornamento della varianza sullo stato prima della stima,
step3() si occupa del calcolo del guadagno del filtro,
step4(double accx,double accy) si occupa dell'aggiornamento della stima,
vs1 prende in ingresso le due accelerazioni stimate, per aggiornare i vettori necessari al sistema grafico.
step5() e il metodo che si occupa dell'aggiornamento della matrice di varianza dello stato dopo la stima.
Il metodo Kalmango viene lanciato dalla classe formdatiaccelerometro che si occupa in effetti di acquisire i dati provenienti dal sistema di misura e che vengono passati al sistema grafico, ogni campione infatti eccetto il primo viene fatto passare in effetti nel filtro, attraverso il metodo Kalmango prima di essere graficato.
Risulta chiaro che la retroazione del filtro viene implementata automaticamente dalla classe formdatiaccelerometro che grazie ad un contatore passa ad uno ad uno tutte le accelerazioni misurate.
Le accelerazioni filtrate vengono inserite ad ogni loop nel vettore di stato che rappresenta per il successivo dato da filtrare il punto di partenza.
In breve formdatiaccelerometro acquisisce i dati, crea un oggetto della classe Kalman, lancia il metodo Kalmango fornendogli i parametri necessari, acquisisce i valori del vettore di stato quando sono gia stati filtrati, e infine inserisce tali valori nelle liste che si occupano di implementare la struttura grafica.
Il primo campione non viene filtrato in quando il filtro di Kalman vuole che i primi dati siano certi, e vengano usati per inizializzare il

filtro, è per questo che la prima accelerazione viene passata al metodo vs0 che si occupa per l'appunto di inizializzare il filtro.
Il codice relativo al metodo Kalmango:

```
public void Kalmango(float ax,float ay,float vx,float vy,float x,float y)
{
            step1();
            step2();
            step3();
            step4(ax, ay);
            vs1(aXstimato, aYstimato, vx, vy,x,y);
            step5();
}
```

Lo schema completo del sistema e rappresentato per chiarezza nella figura della pagina seguente (k rappresenta il tempo relativo all'ultimo campione).



5,4
Aggiornamento dello stato

Il primo step si occupa di aggiornare il vettore di stato X(-), tale vettore e composto da sei elementi,due accelerazioni, due velocità e due posizioni, rispettivamente per l'asse delle ascisse e delle ordinate.
L'aggiornamento avviene moltiplicando la matrice di transizione Φ con il vettore di stato X(+).
Di seguito il codice relativo allo step1():

```
//aggiornamento dello stato
        public void step1()
        {
            //moltiplica il vettore di stato più per la matrive di stato,
            //inserendo i risultati nel vettore di stato meno
            for (int j = 0; j < 6; j++)
            {
                double d; double e; double f;
                double g; double h; double i;
                d = vettorestatopiù[0] * matricestato[j, 0];
                e = vettorestatopiù[1] * matricestato[j, 1];
                f = vettorestatopiù[2] * matricestato[j, 2];
                g = vettorestatopiù[3] * matricestato[j, 3];
                h = vettorestatopiù[4] * matricestato[j, 4];
                i = vettorestatopiù[5] * matricestato[j, 5];

                vettorestatomeno[j] = d + e + f + g + h + i;

            }
        }//fine step1
```

5,5
Aggiornamento della varianza dell' errore sullo stato prima della stima

Il secondo step si occupa di aggiornare la matrice di varianza P(-).
Il primo passaggio di questo metodo effettua la moltiplicazione tra la matrice di varianza dell'errore sullo stato dopo la stima P(+), che e stata aggiornata durante il quinto step del filtro per il campione precedente, e la matrice di transizione Φ che rappresenta lo stato, il risultato é ancora una matrice 6x6 definita nel codice r1.
il metodo si occupa poi di calcolare la traslata di Φ, tale nuova matrice è chiamata m_s_t ove m sta per matrice s per stato e t per transizione.
Nel seguito r1 viene moltiplicata per m_s_t e il risultato e inserito nella nuova matrice di supporto r2 che risulta ancora una matrice 6x6.
E in questa ultima parte del metodo che viene presa in considerazione la matrice di covarianza sul disturbo Q che risulta anche essa, come già visto in precedenza, una matrice 6x6 e può essere sommata a r2.
il metodo scritto per l'esecuzione del secondo step, si occupa poi di inserire Il risultato di tale somma nella matrice di varianza dell'errore sullo stato prima della stima P(-), che risulta cosi aggiornata e pronta per il calcolo del guadagno dell'attuale campione.
Dopo la stima il metodo del quinto step si occupa di effettuare un nuovo aggiornamento di P.
Di seguito il codice relativo allo step2():

```
//aggiornamento varianza errore sullo stato
public void step2()
        {//r1 e una matrice di supporto in cui viene inserito il risultato della
moltiplicazione tra
            //matrice di stato e matrice di varianza più
            double[,] r1 = new double[6, 6];
            for (int j = 0; j < 6; j++)
            {
                for (int i = 0; i < 6; i++)
                {
                    double a; double b; double c; double d; double e; double f;
                    a = matricestato[0, i] * matricevarianzapiù[j, 0];
                    b = matricestato[1, i] * matricevarianzapiù[j, 1];
                    c = matricestato[2, i] * matricevarianzapiù[j, 2];
                    d = matricestato[3, i] * matricevarianzapiù[j, 3];
                    e = matricestato[4, i] * matricevarianzapiù[j, 4];
                    f = matricestato[5, i] * matricevarianzapiù[j, 5];
                    r1[j, i] = a + b + c + d + e + f;
                }
            }
            //calcola traslata della matrice di stato
            double[,] m_s_t = new double[6, 6];
            for (int j = 0; j < 6; j++)
            {
                for (int i = 0; i < 6; i++)
                { m_s_t[i, j] = matricestato[j, i]; }
            }
            //moltiplica matrice risultato "r1[,]" per la traslata della matrice
di stato
            //ed inserisce il risultato nella matrice di supporto r2.
            double[,] r2 = new double[6, 6];
            for (int j = 0; j < 6; j++)
            {
                for (int i = 0; i < 6; i++)
                {
                    double a; double b; double c; double d; double e; double f;
                    a = r1[0, i] * m_s_t[j, 0];
                    b = r1[1, i] * m_s_t[j, 1];
                    c = r1[2, i] * m_s_t[j, 2];
                    d = r1[3, i] * m_s_t[j, 3];
                    e = r1[4, i] * m_s_t[j, 4];
                    f = r1[5, i] * m_s_t[j, 5];
                    r2[j, i] = a + b + c + d + e + f;
                }
            }
            //somma la nuova matrice risultato "r2" con la matrice di covarianza
del disturbo.
            for (int j = 0; j < 6; j++)
            {
                for (int i = 0; i < 6; i++
          { matricevarianzameno[j, i] = r2[j, i] + matricecovarianza[j, i]; }
            }
        }//fine step2
```

5,6
Calcolo del guadagno

Il terzo step rappresenta un passaggio fondamentale per tutto il sistema, si occupa infatti di aggiornare la matrice di correzione dello stato, questo metodo calcola i valori della matrice del guadagno del filtro di Kalman K.
Per comodità riporto la formula completa relativa al calcolo del guadagno:

K= [P(-)*C(traslata)] / {[C*P(-)*C(traslata)]+R}

Il metodo che realizza l'algoritmo per il calcolo di tale equazione inizia effettuando il calcolo della traslata della matrice delle uscite C, viene introdotta allora la matrice m_u_t dove m sta per matrice u per uscite e t per traslata.
Successivamente si effettua il calcolo relativo al prodotto della matrice di varianza dell'errore sullo stato P(-) per la traslata della matrice delle uscite m_u_t ottenuta in precedenza, il risultato è una matrice 6x2 (op1), che descrive il risultato di questa prima operazione e che rappresenta il numeratore dell'equazione utile al calcolo di K.
Per effettuare il prodotto tra la matrice delle uscite C e la matrice di varianza dell'errore sullo stato prima della stima P(-), viene introdotta una matrice di supporto op2 di dimensioni 2x6 ove si inseriscono i risultati di tale operazione.
La matrice op3 e il prodotto della precedente op2 per la traslata della matrice delle uscite, m_u_t calcolata inizialmente, la cui dimensione risulta 2x2 e contiene i risultati della moltiplicazione [C*P(-)*C(traslata)].
La matrice op3, deve essere sommata alla matrice di varianza dell'errore sulla misura R che in effetti è anche essa una matrice di dimensione 2x2, il risultato è inserito nell'ultima matrice di supporto op4, che di conseguenza viene dichiarata con dimensioni 2x2.

La matrice op4 rappresenta il denominatore dell'equazione, per sviluppare tale frazione si effettua il prodotto tra op1 ottenuta nei primi passaggi e l'inversa di op4.
Per il calcolo dell'inversa viene calcolato il determinate di op4 tale determinate risulterà per forza di cose diverso da zero, op4 è quindi invertibile ed effettuando gli opportuni scambi di posizione e cambi di segno si ha una nuova matrice op4new.
Gli elementi della matrice op4new cosi ottenuta vengono divisi per il determinate secondo l'equazione per il calcolo della matrice inversa, i risultati sono inseriti nella nuova matrice che viene definita per coerenza inversa chiamiamola matrice A che risulta naturalmente ancora una matrice 2x2.
Infine si effettua il prodotto tra la matrice op1 e la matrice inversa A.
Il risultato finale è una matrice 6x2 che rappresenta il guadagno del filtro di Kalman per il caso trattato.
Di seguito il codice relativo allo step3():

```
//Aggiornamento matrice di correzione dello stato, calcolo del guadagno.
        public void step3()
        {//formula completa K=P(-)*C(traslata)A ove: A è l'inversa di [C*P(-
)*C(traslata)+R]
            //calcola traslata della matrice delle uscite C.
            double[,] m_u_t = new double[6, 2];
            for (int j = 0; j < 2; j++)
            {
                for (int i = 0; i < 6; i++)
                { m_u_t[i, j] = matriceuscite[j, i]; }
            }
            //op1=P(-)*C(traslato) matricevarianzameno*m_u_t
            double[,] op1 = new double[6, 2];
            for (int j = 0; j < 2; j++)
            {
                for (int i = 0; i < 6; i++)
                {
                    double a; double b; double c; double d; double e; double f;
                    a = matricevarianzameno[0, i] * m_u_t[0, j];
                    b = matricevarianzameno[1, i] * m_u_t[1, j];
                    c = matricevarianzameno[2, i] * m_u_t[2, j];
                    d = matricevarianzameno[3, i] * m_u_t[3, j];
                    e = matricevarianzameno[4, i] * m_u_t[4, j];
                    f = matricevarianzameno[5, i] * m_u_t[5, j];
                    op1[i, j] = a+b+c+d+e+f;
                }
            }
            ////op2=C*P(-)
            double[,] op2 = new double[2, 6];

            for (int j = 0; j < 2; j++)
            {
                for (int i = 0; i < 6; i++)
                {


             double a; double b; double c; double d; double e; double f;
                    a = matriceuscite[j,0] * matricevarianzameno[i, 0];
                    b = matriceuscite[j,1] * matricevarianzameno[i, 1];
                    c = matriceuscite[j,2] * matricevarianzameno[i, 2];
                    d = matriceuscite[j,3] * matricevarianzameno[i, 3];
                    e = matriceuscite[j,4] * matricevarianzameno[i, 4];
                    f = matriceuscite[j,5] * matricevarianzameno[i, 5];

                    op2[j, i] = a+b+c+d+e+f;
                }
            }
```

```
//op3= op2*C(traslato)
            double[,] op3 = new double[2, 2];
            for (int j = 0; j < 2; j++)
            {
                double a; double b; double c; double d; double e; double f;
                for (int i = 0; i < 2; i++)
                {
                    a = op2[i, 0] * m_u_t[0, j];
                    b = op2[i, 1] * m_u_t[1, j];
                    c = op2[i, 2] * m_u_t[2, j];
                    d = op2[i, 3] * m_u_t[3, j];
                    e = op2[i, 4] * m_u_t[4, j];
                    f = op2[i, 5] * m_u_t[5, j];
                    op3[i, j] = a + b + c + d + e + f;
                }
            }
            //op4= op3+R
            double[,] op4 = new double[2, 2];
            op4[0, 0] = op3[0, 0] + matricevarianzarumore[0, 0];
            op4[1, 0] = op3[1, 0] + matricevarianzarumore[1, 0];
            op4[0, 1] = op3[0, 1] + matricevarianzarumore[0, 1];
            op4[1, 1] = op3[1, 1] + matricevarianzarumore[1, 1];
            //inversa di op4
            double det = (op4[0, 0] * op4[1, 1]) - (op4[1, 0] * op4[0, 1]);
            double prova = 1 / det;
            double[,] op4new = new double[2, 2];
            op4new[0,0] = op4[1,1];
            op4new[1, 0] = -op4[1, 0];
            op4new[0, 1] = -op4[0, 1];
            op4new[1, 1] = op4[0, 0];
            double[,] inversa = new double[2, 2];
            inversa[0, 0] = op4new[0, 0] / det;
            inversa[1, 0] = op4new[1, 0] / det;
            inversa[0, 1] = op4new[0, 1] / det;
            inversa[1, 1] = op4new[1, 1] / det;
            //K=op1*inversa
            for (int j = 0; j < 2; j++)
            {
                double a; double b;
                for (int i = 0; i < 6; i++)
                {
                    a = op1[i,0] * inversa[0,j];
                    b = op1[i,1] * inversa[1,j];
                     k[i, j] = a + b;
                }
            }

        }//fine step 3
```

5,7
Aggiornamento della stima sullo stato

Il quarto step è il metodo che da in uscita l'accelerazione stimata, cioè il dato pulito, esso infatti aggiorna il vettore di stato dopo la stima X(+).
In ingresso vengono acquisite le accelerazioni sull'asse X e sull'asse Y passate al metodo Kalmango durante la sua invocazione campione per campione dalla classe formdatiaccelerometro come descritto prima, tali dati sporchi vengono inseriti nel vettore delle misure Y.
L'aggiornamento dello stato avviene grazie all'equazione:

$$X(+)=X(-)+K[Y-(C*X(-))]$$

La prima parte del metodo si occupa di sviluppare il prodotto della matrice delle uscite C per il vettore di stato prima della stima X(-), il risultato viene inserito nel vettore di supporto r di dimensioni 2.
Il vettore delle misure Y viene adesso sottratto a r e i risultati sono inseriti nel nuovo vettore S.
Subito dopo il programma effettua il prodotto tra la matrice K, guadagno del filtro e il vettore S appena calcolato, il risultato viene inserito nel vettore S2 che risulta dimensionalmente un vettore a sei elementi.
Infine la somma tra il vettore di stato prima della stima X(-) e quest'ultimo vettore S2, viene inserito elemento per elemento nel vettore di stato dopo la stima X(+) che contiene quindi l'accelerazione pulita dal rumore, e sarà usato nel primo step al prossimo campione.
Di seguito il codice relativo allo step4():

```
//aggiornamento della stima sullo stato
        //richiede in entrata le accelerazioni rilevate su i due assi e le
        //inserisce nel vettore delle misure.
        public void step4(float Accx, float Accy)
        {//formula completa X(+)=X(-)+K(Y-C*X(-))
            vettoremisure[0] = Accx;
            vettoremisure[1] = Accy;
            //r e un vettore di supporto risultato del prodotto tra matrice
delle uscite
            //e vettore di stato meno.//r=C*X(-)
            double[] r = new double[2];
            double a; double b; double c; double d; double e; double f;
            for (int j = 0; j < 2; j++)
            {
                a = matriceuscite[j, 0] * vettorestatomeno[0];
                b = matriceuscite[j, 1] * vettorestatomeno[1];
                c = matriceuscite[j, 2] * vettorestatomeno[1];
                d = matriceuscite[j, 3] * vettorestatomeno[1];
                e = matriceuscite[j, 4] * vettorestatomeno[1];
                f = matriceuscite[j, 5] * vettorestatomeno[1];
                r[j] = a + b +c +d+e+f;
            }
            //S è supporto per la sottrazione S=Y-r
            double[] S = new double[2];
            S[0] = vettoremisure[0] - r[0];
            S[1] = vettoremisure[1] - r[1];

            //S2 e un supporto per il prodotto S2=K*S
            double[] S2 = new double[6];

            for (int j = 0; j < 6; j++)
            {
                a = k[j, 0] * S[0];
                b = k[j, 1] * S[1];
                S2[j] = a + b;
            }
            //X(+)=X(-)+S2
            for (int j = 0; j < 6; j++)
            {

                vettorestatopiù[j] = vettorestatomeno[j] + S2[j];

            }
            aXstimato = vettorestatopiù[0];
            aYstimato = vettorestatopiù[1];
        }//fine step 4
```

5,8
Aggiornamento della varianza sui disturbi dopo la stima

L'ultimo step di questo algoritmo si occupa di aggiornare la matrice di varianza sui disturbi dopo la stima P(+).
L'aggiornamento di P(+) avviene grazie all'equazione:

P(+)=[I-(K*C)]*P(-)

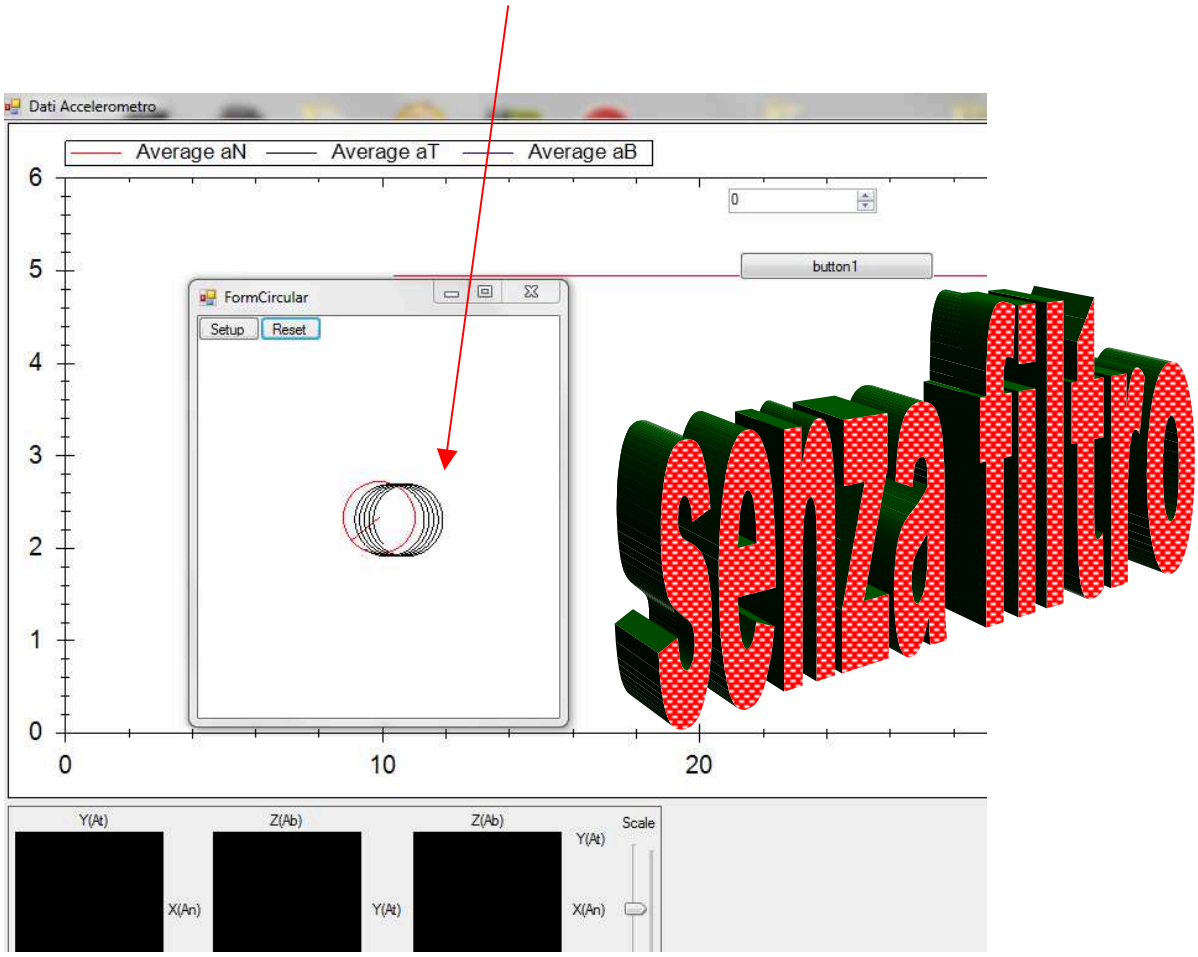
Il prodotto tra la matrice del guadagno k e quella delle uscite C viene inserito nella matrice di supporto op1, questo prodotto da luogo ad una matrice 6x6.
Nella matrice op2 di dimensioni 6x6 invece, viene inserita la sottrazione tra la matrice unitaria I e la matrice di supporto op1.
Infine può essere effettuato il prodotto tra op2 e la matrice di varianza sui disturbi dopo la stima P(-).

```
//aggiornamento varianza sui disturbi.
        public void step5()
        {  //P(+)=(I-KC)P(-)
       //op1 e una matrice di supporto in cui viene inserito il prodotto tra il
            //guadagno e la matrice delle uscite
            double[,] op1 = new double[6, 6];


            for (int i = 0; i < 6; i++)
            {
                for (int j = 0; j < 6; j++)
                {
                    double a; double b;
                    a = k[i, 0] * matriceuscite[0, j];
                    b = k[i, 1] * matriceuscite[1, j];
                    op1[i, j] = a + b;
                }
            }
            //op2 contiene il calcolo della sottrazione tra I e op1
            double[,] op2 = new double[6, 6];
            for (int i = 0; i < 6; i++)
            {
                for (int j = 0; j < 6; j++)
                {
                    op2[i, j] = I[i, j] - op1[i, j];
                }
            }
            //infine il prodotto tra op2 e P(-)
            for (int j = 0; j < 6; j++)
            {
                for (int i = 0; i < 6; i++)
                {
                    double a; double b; double c; double d; double e; double f;
                    a = op2[i, 0] * matricevarianzameno[0, j];
                    b = op2[i, 1] * matricevarianzameno[1, j];
                    c = op2[i, 2] * matricevarianzameno[2, j];
                    d = op2[i, 3] * matricevarianzameno[3, j];
                    e = op2[i, 4] * matricevarianzameno[4, j];
                    f = op2[i, 5] * matricevarianzameno[5, j];

                }
            }
        }
```

5,9
Risultati ottenuti

Le posizioni visualizzate dal sistema senza l'ausilio del filtro risultano altamente rumorose, il grafico risultante evidenzia per le posizioni, punti che si allontanano parecchio dal movimento reale del braccio.
Nella seguente figura sono evidenziate le posizioni ottenute senza il sistema di filtraggio, pertanto il grafico che ne risulta mostra delle circonferenze che si discostano di molto dalla traiettoria reale.

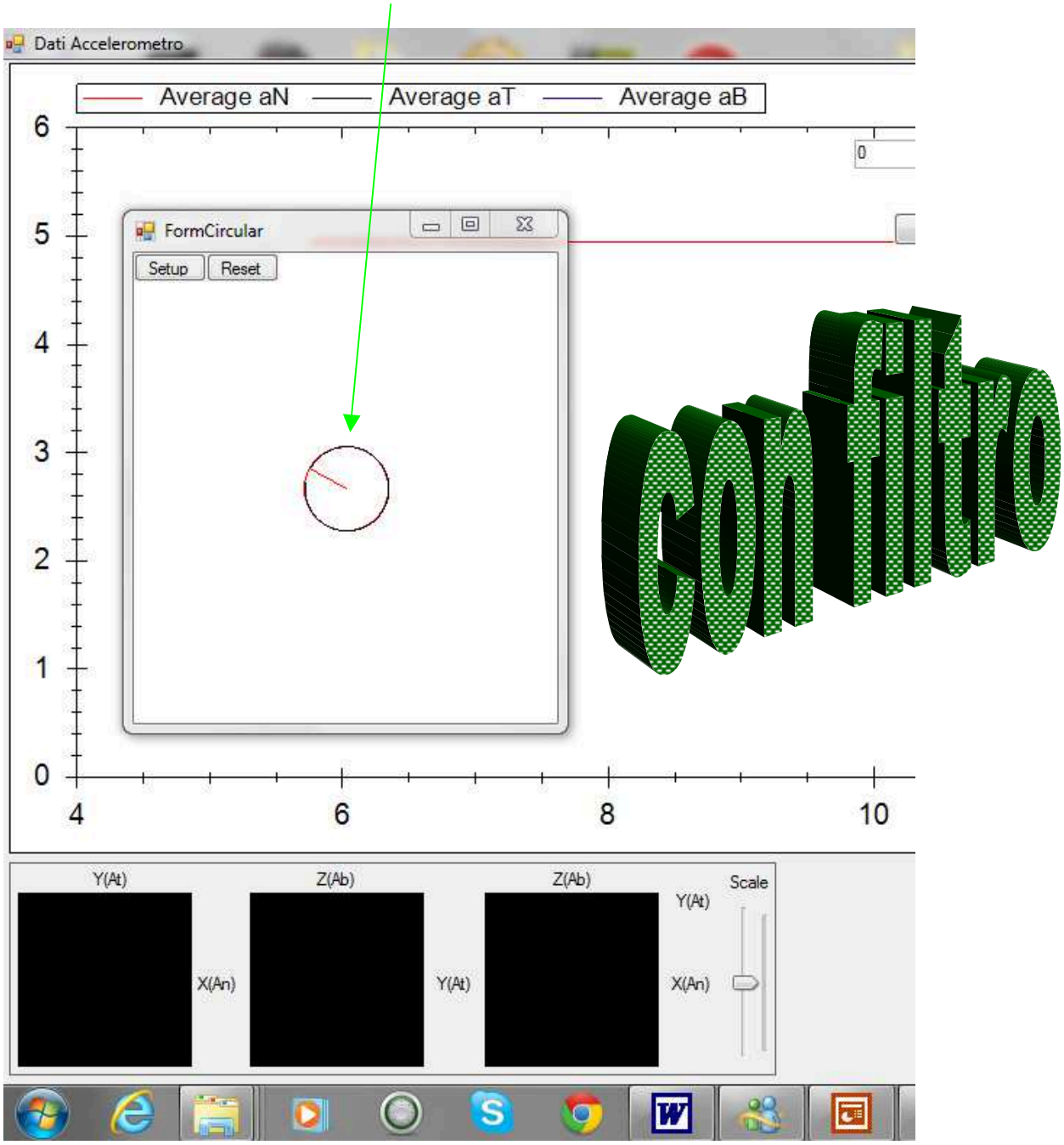
RISULTATO DEL PROGRAMMA SENZA IL FILTRO



Le posizioni visualizzate dal sistema con l'ausilio del filtro di Kalman invece risultano ottime, il grafico derivante evidenzia infatti per le posizioni, punti che si allontanano veramente poco rispetto al movimento reale del braccio.

Nella seguente figura sono evidenziate le posizioni ottenute con il filtraggio delle misure ottenute, pertanto il grafico che ne deriva mostra delle circonferenze che si sovrappongono alla traiettoria reale.
Questi strumenti permettono di valutare la validità e l'utilità del progetto.
Il filtro di Kalman risulta allora uno strumento di forte impatto nella teoria della misura di uno stato, permette infatti di ottenere dei risultati che si discostano della realtà di una misura pressoché impercettibile.
Nel contesto dei sistemi di navigazione inerziale risulta indispensabile l'utilizzo di questo strumento.
Se si vuole ottenere un sistema che sia in grado di rilevare la posizione di un veicolo, o sia in grado di controllare a distanza il suo movimento, si devono filtrare obbligatoriamente i dati provenienti dal sensore.

RISULTATO DEL PROGRAMMA CON IL FILTRO

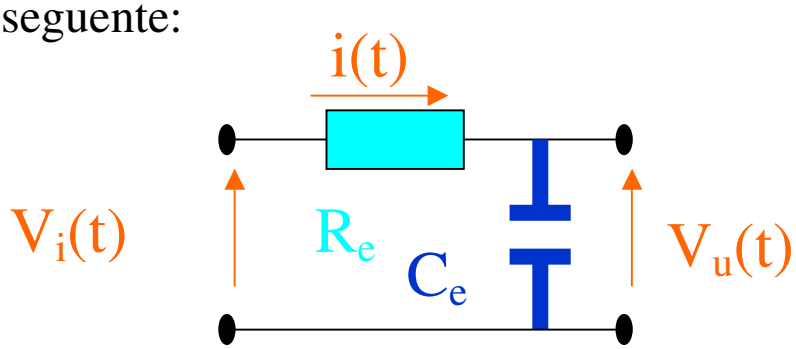


Capitolo 6
CONSIDERAZIONI FINALI

6,1
Applicazione hai circuiti RC

Il filtro di Kalman trattato in questo progetto in effetti descrive per linea generali l'evoluzione di uno stato, questo strumento nasconde all'ora delle sorprendenti potenzialità.
In questo lavoro per esempio il filtro è stato progettato e adattato all'accelerometro sull'asta rotante, ma il modello in effetti può essere usato in svariate applicazioni, come già accennato il modello di questo strumento è riconducibile anche l'anello ad aggancio di fase PLL.
Il Phase-locked loop PLL, è un circuito elettronico molto usato in calcolatori elettronici e di trasmissione dati.
Inoltre il filtro può descrivere in svariate circostanze lo stato di un sistema dinamico che sia disturbato da rumori.
A livello ingegneristico il modello fisico/matematico è uno strumento potentissimo, il suo scopo risiede nell'obbiettivo principale di descrivere l'oggetto che si vuole realizzare e/o controllare.
Il modello fisico/matematico, qualunque sia la sua forma, è a tutti gli effetti una rappresentazione ideale della realtà fisica, come già visto nella descrizione di paragrafo 1,2 in cui si tratta in maniera approfondita anche la differenza tra sistema di riferimento inerziali teorici e Frame che sono la materializzazione dei sistemi di riferimento teorici, per mezzo di modelli matematici, misure e calcoli.
Durante un progetto del genere si deve tenere infatti conto che in effetti un oggetto può essere descritto in diversi modi a secondo l'aspetto che si vuole privilegiare, ed inoltre nessuno di questi è perfetto, nel senso che ci si deve comunque accontentare di

prendere in esame, solo semplificazioni della descrizione di una data entità fisica, formulando ipotesi riduttive, dato che la realtà è in effetti troppo complessa per essere descritta fedelmente.
Facciamo un esempio, quando disegnando un circuito elettrico RC come il seguente:

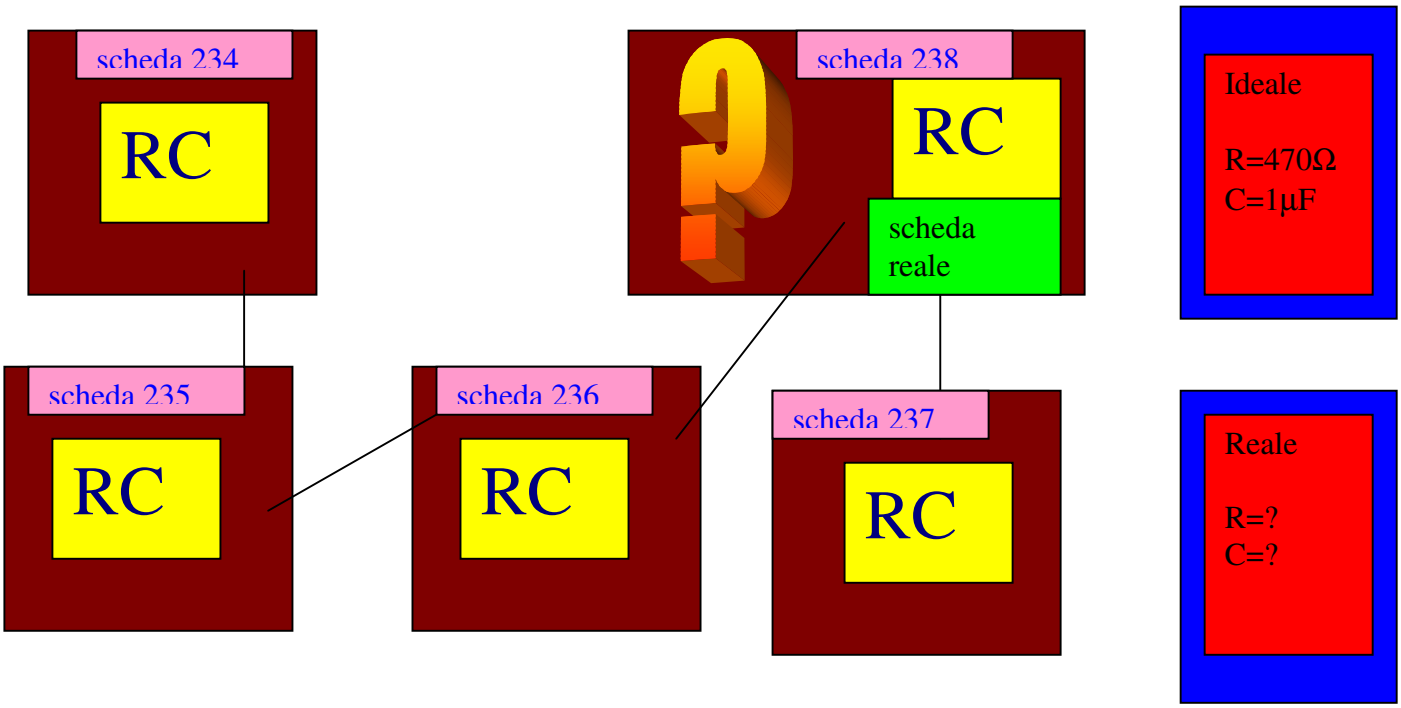


stiamo facendo delle approssimazioni:
- trascuriamo le resistenze di contatto tra i componenti
- trascuriamo l'interferenza elettromagnetica di altri circuiti esterni
- trascuriamo la dislocazione fisica dei componenti
- trascuriamo fenomeni di induzione elettromagnetica nello spazio limitrofo dovuti al campo generato da correnti che attraversano i conduttori
-trascuriamo la tempo-varianza della resistenza e del condensatore
-non consideriamo affatto le tolleranze dei componenti
e cosi via……
Possiamo però dire che: *"un modello fisico/matematico per quando affidabile e vicino alla realtà, presenta un errore che noi abbiamo definito: errore di modello."*
Tale errore di modello e stato già considerato nel paragrafo 3,1 nello specifico del progetto ammettendo una variazione piccola di accelerazione che si vede fisicamente nella realtà, anche se nel modello ideale l'accelerazione risulta uniforme per l'esperimento trattato.
Comunque in generale possiamo dire che:
detto S(real) un sistema che misura risultati nella realtà
detto S(ideal) un sistema che misura risultati secondo il modello
la differenza tra questi sistemi di misura è l'errore di modello **ε(t).**

Ovvero:

S(real)-S(ideal)= **ε**

che rappresenta quindi una quantità non deterministica, cioè che non è possibile determinare a priori da quantità note o calcolabili.
Riprendiamo l'esempio del circuito RC preso in considerazione prima, ipotizziamo per la resistenza un valore nominale di 470Ω e una tolleranza su questo valore di [-5,+5]% e un valore nominale per il condensatore di 1μF con una tolleranza di [-10,+10]%.
Cosi facendo quando si realizza il circuito RC, si sta implicitamente commettendo un errore di modello dovuto all'incertezza sul valore nominale.
Consideriamo ora una serie di circuiti RC e prendiamone una scheda a caso, chiedendoci quale sia l'errore di quella particolare scheda, mettiamola a confronto con quella progettata su carta, assumendo naturalmente come modello ideale il circuito RC e i suddetti valori nominali.



Orbene risulta chiaro che possiamo scegliere una qualunque scheda come campione, e chiamiamo questa coppia resistenza-condensatore (R_{real} C_{real}).
In effetti si vorrebbe uno strumento generale in grado di descrivere le incertezze dei componenti non noti, e che possa adattarsi a tutti i casi dell'ingegneria.
Ebbene tale strumento è il rumore che per definizione rende incerta la determinazione di una grandezza.
Utilizzando due sorgenti di rumore indipendenti, si riesce ad inquinare il valore nominale della resistenza e della capacità, ottenendo valori random, prossimi a tale valore.
Le equazioni relative al sistema descritto nel dominio del tempo sono:

$i(t)= C_{real}\ (dv_c(t)/dt)$
$V_u\ (t)=V_i(t)- R_{real}\ i(t)$
$R_{real}= R_{nominale} + \varepsilon_{resistenza}$
$C_{real}= C_{nominale} + \varepsilon_{condensatore}$

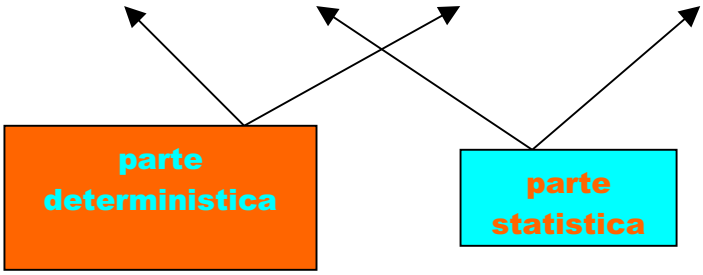
Inoltre si ha:
$dV_u(t)/dt=-(1/ R_{real} *C_{real})\ V_u(t)+ (1/ R_{real} *C_{real})\ V_i(t)$
e con $\tau= R_{real}\ C_{real}= (R_{nominale} + \varepsilon_{resistenza})* (C_{nominale} + \varepsilon_{condensatore})$

Consideriamo ora le equazioni di stato del sistema nella forma più generale risulta:
Matrice di stato -> $x(t)= V_u\ (t)$
Ingresso -> $u(t)= V_i\ (t)$
Matrici di modello ->$A\tau=-1/\tau$, $B\tau=1/\tau$, $C\tau=1$, $D\tau=0$;
da cui si ottiene la nota forma:

$dx(t)/dt= A\tau*x(t)+ B\tau*u(t)$
$y= C\tau*x(t)+ D\tau*u(t)$

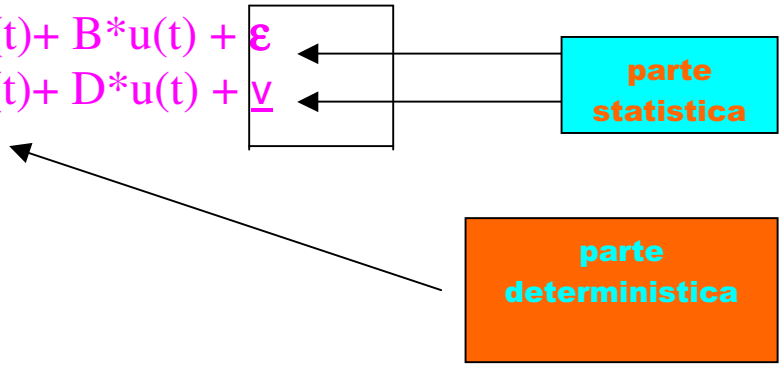
Si può notare adesso come le matrici $A\tau$ e $B\tau$ non sono costanti ma dipendono strettamente da τ ovvero da due variabili aleatorie, ed in modo non lineare, ed è proprio in questo punto che si voleva arrivare, infatti basta notare che queste matrici sono funzione dei rumori $\varepsilon_{resistenza}$ e $\varepsilon_{condensatore}$:

$$A\tau=-1/\tau=-1/[(R_{nominale} + \varepsilon_{resistenza})* (C_{nominale} + \varepsilon_{condensatore})]$$



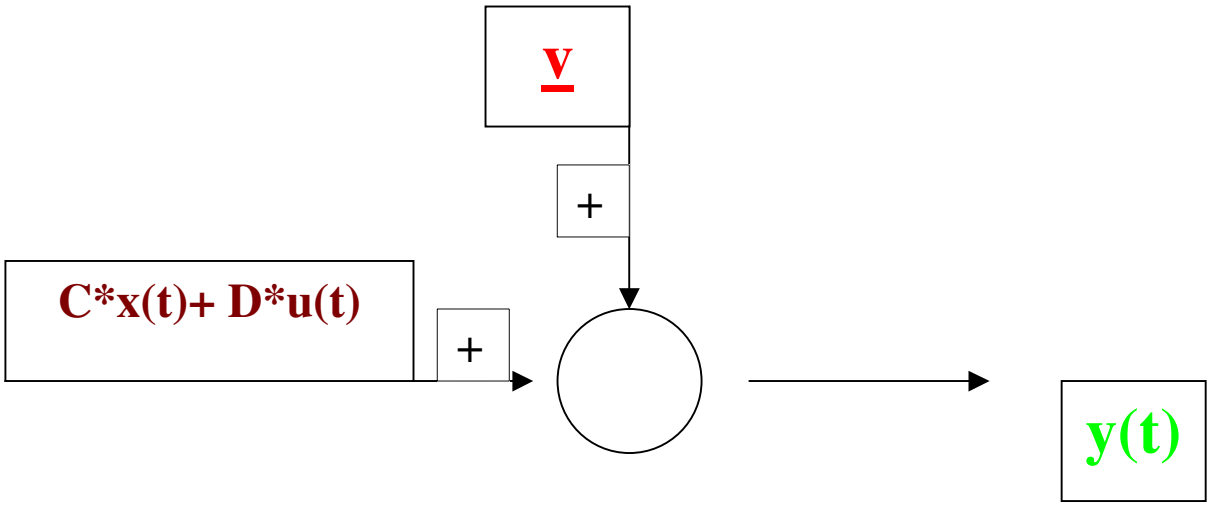
In effetti da quello che abbiamo realizzato otteniamo una parte deterministica e una statistica, ma in questo modello in effetti le due parti risultano strettamente connesse, il modello che vorremmo ottenere invece deve distinguere le due parti.
In pratica vorremmo modellare a parte la compente aleatoria, possiamo allora riscrivere il modello trattato nel seguente modo:

$$dx(t)/dt= A*x(t)+ B*u(t) + \varepsilon$$
$$y \quad = C*x(t)+ D*u(t) + \underline{v}$$



Notiamo che:
- In questo modo in effetti le due parti risultano completamente separate.
- l'errore di modello ε disturba la derivata dello stato.
- il rumore di misura $\underline{v}$ disturba l'uscita.

Gli errori di modellazione, simulano imprecisioni nella redazione delle equazioni, dell'incertezza fisico-geometrica delle grandezze prese in esame e incertezze parametriche varie, inquinano infine lo stato e gli osservatori.
In effetti ε non è direttamente legato ai componenti, e solo uno strumento matematico che ci permette di modellare i disturbi ignoti del nostro sistema reale simulandoli.
E' un misuratore che dichiara quanto vicino sia alla realtà il nostro modello ideale, evidenziando pertanto di quanto ci sbagliamo rispetto alla realtà fisica, questo è vero non per un particolare disturbo, ma in generale simula l'effetto globale di tali rumori.
Il rumore di misura v invece e più semplice, basti misurare un circuito RC con un semplice oscilloscopio, per notare i disturbi correlati alla misura e quindi all'osservatore.



A questo punto possiamo chiederci, che tipo di rumore è v nel nostro circuito, rappresenta forse un rumore impulsivo di burst o di fondo….

In realtà si ipotizza come visto nel paragrafo 3,3 che il rumore abbia distribuzione gaussiana e valor medio nullo, mentre nulla si sa del resto, anche se questo ai fini implementativi non importa.
Risulta essenziale però l'ipotesi che errore e rumore siano incorrelati.

In questa applicazione si è voluto evidenziare la differenza tra parte deterministica e parte statistica del modello matematico, considerando i legami e l'incidenza tra rumore ed errore di modello.

6,2
Prestazioni del filtro di kalman

La parte deterministica del tutto calcolabile, non è sufficiente per ottenere alte prestazioni, essa infatti deve essere affiancata da una teoria statistica di fondo che permette al nuovo modello e quindi al filtro di kalman, di ottenere prestazioni più elevate.
Il Filtro di Kalman è un osservatore ottimo.
Le sue prestazioni elevate sono commentante approfonditamente nei sistemi trattati in questa ricerca, illustrati nel prossimo paragrafo.

6,3
Esempi di sistemi di navigazione inerziale che necessitano del filtro di Kalman

Il filtro può essere applicato a diversi sistemi;
Sono stati trattati diversi modelli.
Elenco delle trattazioni:

1) Assetto del satellite in orbita
2) modello del sistema GPS
3) Phase-locked loop PLL
4) Camminata Robotica
5) Controllo traiettoria di impatto missile
6) Assetto dell' aeroplano in volo
7) Controllo del movimento del veicolo tramite torsione del polso

Di seguito, una breve descrizione dei sistemi che si sono considerati.

1) Assetto del satellite in orbita

Il satellite che orbita attorno alla terra necessita di un alta precisione nel suo moto di rotazione, per mantenere tali traiettorie possono essere usati sistemi di controllo a propulsione che permettono di mantenere l'assetto.
I segnali provenienti dai sensori in volo sul satellite, necessitano di un filtraggio ottimale nel cui contesto può essere inserito un filtro di Kalman capace di ottenere un risultato ottimale.

Le differenze fondamentali rispetto al modello trattato in laboratorio sono dovute al sistema di navigazione inerziale.
Nel caso preso in esame in questa tesi, il sistema inerziale e da riferirsi sulla terra con forza gravitazionale g.
Sul suolo terrestre la forza gravitazionale può essere rilevata sull'asse Z dal sensore, ("*sull'asse entrante nel piano di appoggio dell'asta in rotazione*").
Inoltre visto che il modello è da riferirsi sul piano, tale accelerazione può essere esclusa dal modello, sebbene considerata come disturbo nel filtro di Kalman stesso.
Nell'esempio dell' assetto del satellite in orbita invece la traiettoria deve analizzare anche le rotazioni del satellite stesso e quindi la rilevazione delle grandezze prese in causa, richiede l'utilizzo di altri sensori, come per esempio giroscopi.

2) modello del sistema GPS

Un GPS e un sistema che è in grado di comunicare con un satellite in orbita attorno alla terra, in questo modo comunica la propria posizione, ed eventualmente la posizione del mezzo in cui si trova posizionato.
Dalle posizioni cosi ottenute si può dedurre velocità e accelerazione del mezzo.
Anche in questo caso, il trasferimento dei dati necessita di una elaborazione secondo il filtro di Kalman.
Le posizioni rilevate infatti senza l'ausilio dello strumento statistico matematico risulterebbero sfasate di parecchio.
In questo caso vorrei inoltre sottolineare, il fatto che il mezzo in movimento sulla terra possiede una energia cinetica relativamente bassa rispetto a quella del satellite in orbita, tale differenza è dovuta naturalmente alla diversa velocità, inoltre il satellite in orbita subisce una forza gravitazionale relativamente più bassa rispetto al mezzo in movimento sulla terra, queste differenze causano quindi dei disturbi al livello temporale("il tempo passa più lentamente nel satellite").
Tali differenze nella misura del tempo devono tenere quindi presente della teoria della relatività, senza tali equazioni e senza tenere presente delle relative distorsioni temporali, (causate soprattutto dalle differenti curvature spazio-tempo dovute alla gravità), i sistemi GPS non funzionerebbero.

3) Phase-locked loop PLL

E un circuito elettrico ampiamente utilizzato nell'elettronica per le telecomunicazioni ed agisce come un filtro di Kalman.
PLL permette di creare un segnale, la cui fase viene posta in relazione con quella di un segnale di riferimento, è un classico esempio di controllo in retroazione.
Viene comunemente chiamato infatti, "anello ad aggancio di fase", "circuito ad aggancio di fase" oppure "maglia ad aggancio di fase".
I suoi scopi principali sono quattro: sintetizzatore di frequenza, generatore di clock, demodulatore FM e sistema di clock recovery.
Il circuito e composto da quattro moduli:

- comparatore di fase;
- filtro passa-basso;
- oscillatore controllato in tensione VCO
- divisore di frequenza.

Per ottenere una distribuzione del segnale più precisa, il clock di riferimento è collegato a un PLL.
Una delle uscite di un dispositivo è riportata all'ingresso del PLL in modo da controllare la precisione del segnale di clock distribuito nel circuito.
Dal punto di vista della teoria dei sistemi si può affermare che il PLL agisce come un filtro di Kalman.

4) Camminata robotica

Un altro esempio trattato durante questa ricerca prendeva in considerazione un robot, dotato di una serie di sensori in grado di controllare il movimento di una ruota, in maniera tale che il robot mantenga la posizione di equilibrio pur movendosi avanti e indietro su una sola ruota.
I disturbi dovuti agli errori di misura e di modello del sistema infatti impediscono al controllore di equilibrio di inviare correttamente i segnali di smorzamento, onde evitare la caduta.
Anche in questo modello viene applicato come soluzione ai disturbi il filtro di kalman che permette al controllore di rilevare in maniera ottima la posizione di tutti i componenti del robot, e di inviare i segnali per il movimento della ruota, di modo tale da raggiungere l'obbiettivo prefissato del mantenimento dell'equilibrio.

5) Controllo traiettoria di impatto missile

Il bisogno di impiegare delle guide inerziali nel missile Minuteman e nel progetto Apollo diede una spinta ai primi tentativi di miniaturizzazione dei calcolatori e al successo del filtro di Kalman.
Un veicolo di tipo missilistico viene controllato a distanza, inizialmente si calcola una spinta iniziale che mette il mezzo in traiettoria, successivamente grazie a diversi sensori la posizione del missile viene rilevata.
Un calcolatore tiene traccia delle posizioni rilevata, ma la sola spinta non è in grado di mantenere la traiettoria desiderata.
Piccole spinte, ordinate dai segnali inviati dal calcolatore al veicolo in volo modificano l'assetto del volo, di modo tale da mantenere la direzione di impatto voluta.
Un missile in volo deve mantenere necessariamente una traiettoria pressoché perfetta, se vuole impattare nel luogo desiderato.
Il Filtro di Kalman riveste naturalmente il ruolo fondamentale di guida per questo controllo, filtrando dai disturbi di modello e di misura, i segnali inviati dal mezzo per la rilevazione della posizione e inviati dal calcolatore per la correzione della traiettoria.
Lo stesso modello fu utilizzato come già accennato per mantenere la traiettoria del razzo diretto sulla Luna nel progetto Apollo.
Probabilmente senza l'ausilio di questo strumento sarebbe stato difficile mantenere la traiettoria di avvicinamento lunare.

6) Assetto dell' aeroplano in volo

I sistemi di navigazione inerziale incorporano degli accelerometri lineari ed angolari (per misurare le variazioni di posizione).
Alcuni includono degli elementi giroscopici (per mantenere un riferimento assoluto angolare).
Gli accelerometri angolari misurano la rotazione dell' aeroplano nello spazio.
Generalmente per un sistema in volo, c'è almeno un sensore per ciascuno dei tre assi:
asse di beccheggio(alzare/abbassare la prua)
asse di imbardata (prua a destra o a sinistra)
asse di rollio (oscillazione intorno al proprio asse orizzontale).
Gli accelerometri lineari misurano il modo in cui il velivolo si muove nello spazio.
Poiché esso si può muovere lungo tre assi (su e giù, sinistra e destra, ed avanti e indietro) esiste un accelerometro lineare per ciascuno dei tre assi.
Un calcolatore calcola con continuità la posizione attuale del velivolo.
Prima, per ciascuno dei sei gradi di libertà (x, y, z e θx, θy e θz), poi integra nel tempo le accelerazioni percepite per dedurre la velocità attuale.
In seguito integra la velocità per dedurre la posizione attuale.
La guida inerziale di un veicolo in volo è difficoltosa senza calcolatori.
Risulta chiaro inoltre che per rilevare in modo ottimo le accelerazioni che indicano il beccheggio, l'imbardata e il rollio, deve essere introdotto un filtraggio dei disturbi, un modello di correzione basato sul filtro di Kalman rende i risultati più precisi e permette il controllo degli aeroplani in volo, mantenendo l'assetto e dirigendo il veicolo lungo le traiettorie volute.

7) Controllo del movimento del veicolo tramite torsione del polso

Questo robot ha un funzionamento molto simile a quello trattato in questa tesi, infatti presenta le stesse componenti, un accelerometro viene fissato al polso di un essere umano, una rotazione del polso determina un segnale che controlla la potenza di ciascuna ruota, un dosaggio differenziale permette all'ora al robot di effettuare traiettorie rettilinee e curvilinee.
Il dato acquisito dall'accelerometro viene prima mandato al PC, e poi ritrasmesso al robot che si muove di conseguenza.
Ancora una volta il dato acquisito risulta affetto da disturbi.
Tale errore risulta ancor più evidente se consideriamo il modello "TOM e JERRY", ovvero associamo a questo robot un secondo robot identico al primo, ma inseguitore, la traiettoria di inseguimento risulta disturbata e la stima si discosta parecchio dalla realtà.
L'introduzione del filtro di Kalman in questo sistema di controllo garantisce la pulizia dei dati e le traiettorie di inseguimento risultano essere ora buone(Tom riesce ad inseguire Jerry).

6,4
Questioni di fisica

Si è discusso ampiamente il modello di filtraggio dei disturbi, basato su un sistema inerziale.
E ampiamente evidenziato il legame che c'è tra probabilità ed evidenza dei fatti.
I risultati infatti, oltre ad essere ottenuti da un modello puramente probabilistico, si dimostrano ottimi sul piano della realtà.
Dato valido l'esperimento della doppia fenditura e compresa la duplice natura dell'elettrone (onda - corpuscolo), possiamo affidarci completamente alle teorie inerenti situazioni probabilistiche correlate per altro alla fisica quantistica.
Si è discusso il sistema di misura dell'accelerazione di un braccio roteante, si visto come poter *ordinare al braccio il suo stato di accelerazione*, al livello pratico infatti è possibile inviare dati dall'accelerometro per il controllo del moto.
Tale situazione ci fa ipotizzare all'ora di poter controllare il moto di qualunque veicolo al livello ingegneristico, e ci fa sognare il controllo di particelle subatomiche al livello fisico.
Nei laboratori del CERN(Centro Europeo Ricerca Nucleare) di Ginevra infatti esiste un acceleratore di particelle LHC, che ci permette di accelerare particelle subatomiche ad energie elevatissime.
Questi canali in cui si muovono le particelle sono tenute ad una temperatura prossima allo zero, che permette alla particella di accelerare a velocità inerenti il campo della fisica delle alte energie.
Il sistema per altro e molto simile per certi aspetti al semplice sistema costruito in questa tesi, infatti le particelle ruotano in cerchi anche se vengono accelerate, il tunnel principale di rotazione (27 km) permette di studiare, in fisica delle alte energie, l'urto di questa particella chiamiamola a1, con un'altra a2,

entrambe dotate di velocità infinitamente prossime a quelle della luce.
Dall'urto delle particelle e dai risultati ottenuti si è cercato di aggiornare il nostro grado di comprensione della materia.
La materia infatti probabilmente è composta secondo un modello detto MODELLO STANDARD.
In fisica moderna il Modello Standard può essere convalidato dall'esistenza di una ipoteca particella residente nel campo di Higgs, che è stata trovata ultimamente dal CERN grazie agli esperimenti sopra descritti.
Questo modello racchiude in se la struttura di tutte le particelle fino ad oggi scoperte tra cui il fantomatico bosone di Higgs. Inoltre questo modello rappresenta una teoria unificatrice, nel senso che spiega e descrive tre delle quattro forze fondamentali della natura ovvero interazione debole, forte ed elettromagnetica.
La ricerca mira in futuro quindi a tentare di includere nel modello l'ultima delle quattro forze in gioco, la forza gravitazionale descritta dalla teoria della relatività.
Consideriamo un onda luminosa proveniente da un sistema stellare lontano dal nostro, si può osservare durante una eclissi che il raggio luminoso curva nel suo percorso spazio-temporale, questo convalida che lo spazio-tempo è curvo nei pressi di grandi masse.
La teoria della relatività, su cui bisogna far affidamento per calibrare sistemi di navigazione GPS al livello temporale, riguarda per linee generali situazioni di dimensione abnorme, (coinvolgendo pianeti, masse stellari, galassie ecc….);
il modello standard invece riguarda l'infinitamente piccolo, che coinvolge la moderna fisica quantistica.
Il problema fondamentale è il seguente dunque;
data per certa la teoria che lo spazio e il tempo si possono curvare, a meno di appoggiarci su una massa delle dimensioni del sole, come si fa a legare tale teoria agli studi sul modello standard, visto che questi riguardano eventi nel microspopico.

In effetti a noi interessa comunque solo la massa per creare una forza gravitazionale degna, non il volume.
Un corpo abbastanza piccolo da rientrare nelle leggi della fisica quantistica, ma con una massa pari ad un sistema di stelle.
Casi del genere sono ipotizzati nelle teorie dei buchi neri e in quelle inerenti le condizioni agli albori dell'universo.
Una teoria unificatrice del tutto e tutt'oggi in fase di ricerca, e riguarda la teoria delle stringhe, secondo la quale l'universo e fatto di membrane, in cui ogni fetta(membrana) è un universo parallelo al nostro, naturalmente tutto ciò deve essere dimostrato.
Il dubbio più acceso riguarda il fatto che tale teoria non può ne essere dimostrata ne essere smentita, infatti i moderni acceleratori di particelle non sono in grado di raggiungere le alte energie richieste dall'esperimento.